

Soluzioni e commenti ai problemi della prima tappa - contesto matematici esperti

Classe prima

La cartina geografica

La cartina può essere colorata con 5 e con 4 colori in tanti modi diversi. Addirittura bastano 3 colori (per esempio, seguendo la numerazione proposta nella scheda riservata agli insegnanti, si può colorare in questo modo: a-b-b-c-a-b-a-b-c-a-b-b-c-b-b-b-a).

Classe seconda

La cartina geografica

Le regioni della Mongolia sono 18.

Bastano quattro colori per colorare, seguendo le richieste, questa cartina.

E non se ne possono prendere di meno perché già per colorare le regioni 6, 5, 8, 7, 9, 18 ne occorrono 4.

Classe terza

Bastano quattro colori per colorare, seguendo le richieste, questa cartina.

E non se ne possono prendere di meno perché già per colorare le regioni 6, 5, 8, 7, 9, 18 ne occorrono 4.

Ne bastano invece tre per colorare la cartina dell'Asia seguendo le richieste che sono date.

E non se ne possono prendere di meno perché già per colorare 2,4,5 due colori non bastano.

Classe quarta

Bastano quattro colori per colorare, seguendo le richieste, questa cartina.

Per convincere qualcuno che quattro è il numero più piccolo basta fargli osservare che già per colorare le regioni 6,5,8,7,9,18 ne occorrono 4.

Ne bastano invece tre per colorare la cartina dell'Asia seguendo le richieste che sono date.

E non se ne possono prendere di meno perché già per colorare 2,4,5 due colori non bastano.

Ci siamo chiesti perché alcuni gruppi ci hanno risposto che questa non è matematica, ma geometria e altri che non è matematica, ma geografia o educazione all'immagine. La sensazione è che per molti la matematica sia soltanto la scienza che fa i conti o, in generale, quella che si occupa dei numeri. Forse è un impoverimento del significato di matematica di cui dobbiamo tener conto quando presentiamo le nostre proposte agli studenti: studiare le forme, analizzare i dati, fare previsioni sono attività che rientrano ovviamente nell'ambito matematico e sulle quali forse mettiamo una minor attenzione. Ci pensiamo.

Comunque forse possiamo cominciare raccontando ai ragazzi che la domanda a cui hanno risposto è una domanda alla quale hanno provato a rispondere anche i ricercatori matematici. Ci sono voluti molti tentativi per arrivare a una risposta completa e definitiva che adesso va sotto il nome di "teorema dei quattro colori" e che dice: "il numero MINIMO di colori che occorre per avere la certezza di colorare QUALSIASI carta geografica come si colorano usualmente le carte geografiche, cioè in modo tale che nazioni che hanno un tratto di confine in comune abbiano colori diversi, è quattro".

Quasi subito ci si è accorti che non si poteva sperare di risolvere il problema con meno di quattro colori (la cartina della Mongolia ha dato a noi un esempio, ma anche quella di Toscana, Umbria, Lazio e Marche andrebbe bene), ma ci sono voluti più di 120 anni per dimostrare che 4 colori sono sempre sufficienti. E comunque questa dimostrazione (che risale al 1976) ha dato il via a una lunga serie di polemiche dal momento che fa intervenire, pesantemente e in modo ineliminabile, il calcolatore. Qualcuno riteneva infatti di dover rifiutare le dimostrazioni che, come questa, non possono essere verificate da ogni matematico, passaggio su passaggio, cioè le dimostrazioni nelle quali ci sia qualcosa che sfugge al controllo: qui per esempio occorre fidarsi del fatto che il calcolatore non sbaglia e, soprattutto, che faccia solo quello che il programma gli chiede di fare. Ora,

a distanza di trent'anni, la discussione si è sopita e i più pensano che anche questo tipo di dimostrazioni sia accettabile.

(Questa presentazione è stata tratta da "Il problema dei quattro colori" di Maria Dedò pubblicato nel n. 24 di *Lettera matematica pristem* (Springer, giugno 1997))

Classe quinta

Per la cartina della Mongolia bastano meno di 5 colori, ne servono 4.

Non se ne possono usare meno di 4 perché c'è una regione che confina con altre 5. Anche se si alternano i colori, essendo dispari non bastano tre colori.

Per la seconda cartina (quella dell'Asia) bastano 3 colori. Non se ne possono usare di meno perché già per colorare gli stati 2,4,5 due colori non bastano.

Ci siamo chiesti perché alcuni gruppi ci hanno risposto che questa non è matematica, ma geometria e altri che non è matematica, ma geografia o educazione all'immagine. La sensazione è che per molti la matematica sia soltanto la scienza che fa i conti o, in generale, quella che si occupa dei numeri. Forse è un impoverimento del significato di matematica di cui dobbiamo tener conto quando presentiamo le nostre proposte agli studenti: studiare le forme, analizzare i dati, fare previsioni sono attività che rientrano ovviamente nell'ambito matematico e sulle quali forse mettiamo una minor attenzione. Ci pensiamo.

Comunque forse possiamo cominciare raccontando ai ragazzi che la domanda a cui hanno risposto è una domanda alla quale hanno provato a rispondere anche i ricercatori matematici. Ci sono voluti molti tentativi per arrivare a una risposta completa e definitiva che adesso va sotto il nome di "teorema dei quattro colori" e che dice: "il numero MINIMO di colori che occorre per avere la certezza di colorare QUALSIASI carta geografica come si colorano usualmente le carte geografiche, cioè in modo tale che nazioni che hanno un tratto di confine in comune abbiano colori diversi, è quattro".

Quasi subito ci si è accorti che non si poteva sperare di risolvere il problema con meno di quattro colori (la cartina della Mongolia ha dato a noi un esempio, ma anche quella di Toscana, Umbria, Lazio e Marche andrebbe bene), ma ci sono voluti più di 120 anni per dimostrare che 4 colori sono sempre sufficienti. E comunque questa dimostrazione (che risale al 1976) ha dato il via a una lunga serie di polemiche dal momento che fa intervenire, pesantemente e in modo ineliminabile, il calcolatore. Qualcuno riteneva infatti di dover rifiutare le dimostrazioni che, come questa, non possono essere verificate da ogni matematico, passaggio su passaggio, cioè le dimostrazioni nelle quali ci sia qualcosa che sfugge al controllo: qui per esempio occorre fidarsi del fatto che il calcolatore non sbaglia e, soprattutto, che faccia solo quello che il programma gli chiede di fare. Ora, a distanza di trent'anni, la discussione si è sopita e i più pensano che anche questo tipo di dimostrazioni sia accettabile.

(Questa presentazione è stata tratta da "Il problema dei quattro colori" di Maria Dedò pubblicato nel n. 24 di *Lettera matematica pristem* (Springer, giugno 1997))

E poi succede una cosa buffa: gruppi della stessa classe dicono che fanno e non fanno cose analoghe nella loro scuola: che cosa provoca questa differenza di percezione o di consapevolezza? Anche su questo val la pena che riflettiamo.