Soluzioni dei giochi della seconda tappa

Classe I

Se non sappiamo contare, per sapere se ci sono più cerchi o triangoli non possiamo che spuntare un cerchio e un triangolo, un altro cerchio e un altro triangolo, … e così via fino a vedere se avanza qualcosa e allora che cosa avanza. I numeri coinvolti qui sono grossi per una prima elementare e quindi credo che provare a contare quanti triangoli e quanti cerchi sono sia proprio un'operazione inutile. Nessuno vuol sapere quanti sono, ma se sono in numero uguale o diverso…

I ragazzi potrebbero essere tentati di procedere per raggruppamenti: niente di male, evidentemente, molti gruppi li hanno usati per fare il confronto … a pezzi, ma forse anche qui il docente dovrebbe proprio tapparsi le orecchie e non volere sapere il numero dei cerchi e il numero dei triangoli.

Comunque c'è un cerchio di più rispetto ai triangoli.

Classe II

Se non sappiamo contare, per sapere se ci sono più cerchi o triangoli non possiamo che spuntare un cerchio e un triangolo, un altro cerchio e un altro triangolo, … e così via fino a vedere se avanza qualcosa e allora che cosa avanza. I numeri coinvolti qui sono grossi per una seconda elementare e quindi credo che provare a contare quanti sono i triangoli e quanti sono i cerchi sia un'operazione che rischia di condurre facilmente ad ottenere risultati sbagliati e comunque un'operazione inutile visto che nessuno vuol sapere quanti sono, ma se sono in numero uguale o diverso…

I ragazzi potrebbero essere tentati di procedere per raggruppamenti: niente di male, evidentemente, si fanno di sicuro meno errori, ma forse qui il docente dovrebbe impuntarsi a non volere sapere il numero dei cerchi e il numero dei triangoli, ed eventualmente a chiedere che il confronto sia fatto direttamente fra i raggruppamenti.

Comunque ci sono 3 cerchi di più che triangoli.

Classe III

Già l'idea che i numeri di una tabellina siano infiniti non è affatto ovvia, visto che di solito siamo ben contenti se i nostri ragazzi imparano a moltiplicare il numero interessato per 1, per 2, per 3, …, per 10.

Neppure è naturale partire dallo zero, ma per una volta val la pena di farlo.

E che la tabellina sia infinita dipende soltanto dal fatto che i numeri per contare sono infiniti: se anche immagino di aver raggiunto il numero più grande possibile, in realtà posso sempre fare "più uno" e ottenere un numero ancora più grande. (Vi ricordate la storia raccontata da Cesare Zavattini con il suo signor Binacchi?)

Ma che i numeri di una tabellina siano tanti quanti quelli di ogni altra è ancora più divertente. Eppure una volta sulla linea dei numeri si salta per esempio di 3 e l'altra volta di 4 e quindi dovrebbe la seconda tabellina essere più … rada!

Invece se mando lo zero nello zero, il 3 nel quattro, il 6 nell'8, il 9 nel 12, …, il 3000 nel 4000,…, cioè mando il numero ottenuto moltiplicando 3 per il numero a nel numero ottenuto moltiplicando 4 per lo stesso numero a, trovo una bella corrispondenza "tanti-quanti" fra le due tabelline.

Classe IV

Già l'idea che le tabelline siano serie di numeri di lunghezza infinita non è affatto ovvia, visto che di solito siamo ben contenti se i nostri ragazzi imparano a moltiplicare il numero interessato per 1, per 2, per 3, …, per 10.

Neppure è naturale partire dallo zero, ma per una volta val la pena di farlo.

E che la tabellina così sia infinita dipende soltanto dal fatto che i numeri per contare sono infiniti: se anche immagino di aver raggiunto il numero più grande possibile, in realtà posso sempre fare "più uno" e ottenere un numero ancora più grande. (Vi ricordate la storia raccontata da Cesare Zavattini con il suo signor Binacchi?)

Ma che i numeri di una tabellina siano tanti quanti quelli della linea dei numeri è ancora più sorprendente. Con la tabellina del 3, per esempio, sulla linea dei numeri si salta ogni volta di 3 e non si fa un passo solo e quindi dovrebbe la tabellina essere più … rada!

Invece se mando lo zero nello zero, il numero 1 nel numero 3=3x1, il numero 2 nel numero 6=3x2, il numero 3 nel numero 3x3, e così via, trovo una bella corrispondenza "tanti-quanti" fra i due insiemi di numeri. E se i bambini di I si fidano del disegno che possiamo fare loro della linea dei numeri e sotto della linea della tabellina del 3, il gioco è fatto: bisogna solo disegnare un bel fascio di frecce!

Classe V
Nessuno pensa di primo acchito che i numeri della linea dei numeri sono “tanti quanti” i numeri pari, visto che il numero 3 non è certo pari. Eppure lo sono! E’ un fatto davvero sorprendente che sconvolge le nostre certezze legate all’abitudine che abbiamo a trattare con gli insiemi finiti. Ma se ce la prendiamo con calma e scriviamo su una colonna tutti i numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5,… e su una seconda colonna affiancata alla prima tutti i numeri pari, allora le frecce vengono quasi da sole: sono quelle che a ogni numero associano il suo doppio, a 0 associano 0, a 1 associano 2, a 2 associano 4 … al numero a il suo doppio $2a$.
A questo punto dimostrare che si tratta di una corrispondenza tanti-quanti è alla portata di tutti: ogni numero ha un solo doppio e ogni numero pari è il doppio di uno e un solo numero.

NOTA C’è una bella storia che può darci la sensazione di toccare con mano la differenza fra insiemi finiti e insiemi infiniti: è quella dell’albergo Infinito.

All’Albergo Infinito le stanze sono tantissime, tante quanti sono i numeri della linea dei numeri. C’è la stanza 1, c’è la stanza 2,…, c’è la stanza 1.000.000 … e per ogni numero che siete capaci di pensare c’è la stanza con quel numero.
Un pomeriggio di sabato l’albergo Infinito è pieno.
Alle sette di sera arriva un nuovo cliente. Il maître dell’albergo non si spaventa: fa spostare ogni cliente nella stanza con il numero successivo a quella che sta occupando (quello della stanza 1 va nella 2, quello della 2 va nella 3, quello della 3 va nella 4 e così via) e poi mette il nuovo cliente nella stanza n. 1 che si è liberata. Bravo!
Alle otto di sera arrivano 10 persone nuove. Anche questa volta il maître dell’albergo non si spaventa: fa spostare ogni cliente nella stanza con il numero che viene 10 posti dopo quella che sta occupando (quello della stanza 1 va nella 11, quello della 2 va nella 12, quello della 3 va nella 13 e così via) e poi mette i nuovi clienti nelle stanze con i numeri 1,2, 3 ,…, 10 che si sono liberate. Bravo!
Ma a mezzanotte succede una tragedia: arriva un’infinità di clienti, tanti clienti quanti sono i numeri della linea dei numeri: 1, 2, 3, 4, …, .
Il maître non si perde d’animo neppure questa volta: fa spostare ogni cliente nella stanza con il numero doppio di quello della stanza che sta occupando (quello della stanza 1 va nella 2, quello della 2 va nella 4, quello della 3 va nella 6, …, quello della 1000 va nella 2000 e così via). Gli restano così libere tutte le stanze con i numeri dispari e può metterci i nuovi clienti.
Una bella sorpresa, una cosa che non avrebbe potuto fare se non avesse avuto clienti collaborativi, ma soprattutto se il suo albergo avesse avuto solo un numero finito di stanze.