A proposito di finito/infinito

La domanda da cui siamo partiti è stata: come è possibile cogliere la differenza fra insiemi finiti e insiemi infiniti?

Per rispondere abbiamo avuto bisogno di concordare preliminarmente:

1. che cosa vuol dire che abbiamo a che fare con insiemi?

2. Che cosa vuol dire contare gli elementi di un insieme?

E successivamente ci siamo domandati: ci sono attività che si possono suggerire per far sentire "profumo di infinito" ai ragazzini di scuola elementare? (e ai ragazzi di scuola media?)

1. Cominciamo a dire che cosa intendiamo per insieme.

"Insieme" è una parola del linguaggio comune, ricca di sinonimi quali famiglia, raggruppamento, collezione, agglomerato. Spesso si legge o si sente dire che in matematica questa parola sta ad indicare una famiglia A di oggetti che possiedono, oppure non possiedono, una qualsiasi proprietà o anche una famiglia A di oggetti che hanno una proprietà caratteristica. Ma questa non è una buona descrizione perché lascia pensare che per avere un insieme … in senso matematico sia necessario avere una collezione di oggetti che "hanno qualcosa in comune": l'insieme delle lettere dell'alfabeto, l'insieme dei numeri pari, l'insieme dei numeri naturali che non sono divisori di 12 ecc. E non è questa la situazione. In matematica la parola insieme viene usata per indicare una famiglia A di elementi tale che, per ogni "oggetto" che ci venga in mente, sappiamo dire se esso sta oppure non sta in A o, come si dice, se è oppure non è un elemento dell'insieme A. E se vogliamo trovare una proprietà comune agli elementi di A è proprio al fatto che appartengano ad A che dobbiamo riferirci.

2. Contare gli elementi di un insieme A (finito) consiste nello stabilire una corrispondenza biunivoca fra A e un opportuno segmento iniziale dell'insieme N = {1, 2, 3, … , n, …} dei numeri naturali. Se A viene messo in corrispondenza biunivoca con $I_1 = \{1\}$ si dice che A contiene 1 elemento (ha cardinalità 1), se viene messo in corrispondenza biunivoca con $I_2 = \{1, 2\}$ si dice che A contiene 2 elementi (ha cardinalità 2), …, se viene messo in corrispondenza biunivoca con $I_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ si dice che A contiene 7 elementi (ha cardinalità 7) e così via.

Si può dimostrare che due intervalli di lunghezza diversa (come $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $I_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$) non possono essere messi in corrispondenza biunivoca fra loro. Sembra un'osservazione poco pertinente, ma esprime un fatto che è la base stessa del contare: non avremmo nessuna certezza di aver contato 5 oppure 7 case se ci fosse la possibilità di mettere in corrispondenza I_5 con I_7.

Dire che un insieme contiene un numero finito di elementi (brevemente, è finito) significa che abbiamo potuto porlo in corrispondenza biunivoca con qualche I_n.

E veniamo ora a rispondere alla domanda iniziale.

Abbiamo già visto che non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra un segmento iniziale I_n e altri segmenti iniziali I_k in cui k sia diverso da (e quindi in particolare, minore di) n. Ora, questa osservazione ci permette di dire che se A è un insieme finito, non c'è alcuna possibilità di metterlo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Per esempio, se A ha cardinalità 10 non esiste alcuna corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme costituito da 6 elementi.
Invece se consideriamo l'insieme N = {0, 1, 2, 3, … , n, …} dei numeri naturali, la corrispondenza che ad ogni numero associa il suo successore è una corrispondenza biunivoca fra N e il suo sottoinsieme S costituito da tutti i numeri naturali escluso lo zero.
Ciò ci permette di affermare che N non è finito: diremo che è infinito. E questa è la maniera con cui individuiamo gli insiemi infiniti: un insieme è infinito se è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Una domanda nuova: tutti gli insiemi infiniti sono "dello stesso tipo", cioè possono essere messi in corrispondenza biunivoca fra loro, oppure no? Detto altrimenti, sono equipotenti?
La risposta è no!

Una possibile bibliografia

A. Deledicq, F. Casiro, *Addomesticare l'infinito*, Edizioni Kangourou Italia, Milano 2005
S. Di Sieno, S. Levi, *Aritmetica di base*, McGraw-Hill, Milano 2005