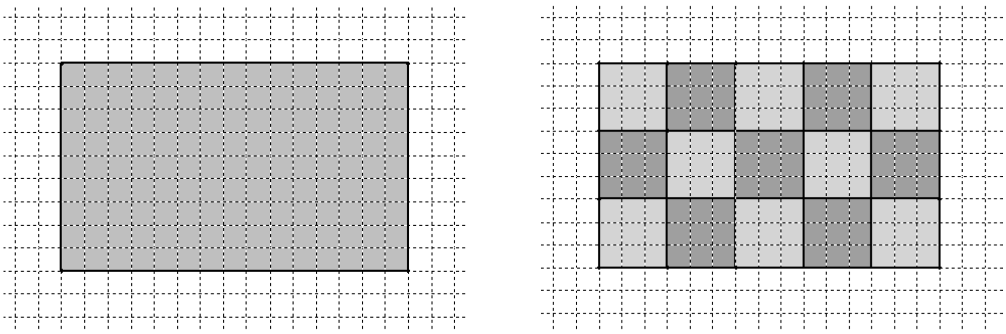
Per la prima secondaria di I grado

Piastrelliamo i rettangoli

Qui sotto vedete un rettangolo, disegnato sulla carta a quadretti.
Potete immaginare che sia una stanza, che vogliamo piastrellare, con delle piastrelle quadrate, tutte uguali fra loro, con il lato che misura un certo numero di quadretti. Non vogliamo rompere le piastrelle, quindi vogliamo che ce ne stia un numero giusto sia per il lungo che per il largo.
Non è un grosso problema, perché la carta a quadretti divide già il rettangolo in quadratini, di lato un quadretto; però vorremmo che le piastrelle fossero più grandi possibile; ci va bene anche la divisione in quadratini di lato 1 quadretto, ma soltanto quando siamo sicuri che non si possa fare di meglio. Per esempio, per un rettangolo di lati 15 e 9 quadretti, come quello che vedete in figura qui sotto, si potrebbero usare anche piastrelle di lato 3 quadretti:



Si può fare anche di meglio? Chiara e Carlo sono di opinioni differenti: Carlo sostiene che si possono usare piastrelle ancora più grandi, Chiara dice invece che non si può fare meglio di così.

1. Secondo voi chi dei due ha ragione? ………………………………………………………………………………

2. Perché?

……

……

Provate a piastrellare altri rettangoli, cercando sempre di utilizzare piastrelle con lato il più grande possibile. Per esempio, che piastrelle ottenete per un rettangolo di lati 15 e 10 quadretti? E per uno di lati 30 e 7? E per uno di lati 13 e 8? E per uno di lati 39 e 27?
Dopo aver trovato la lunghezza del lato di una piastrella che vada bene, discutete anche fra di voi finché siete sicuri che non si possa fare di meglio.
Potete registrare i numeri che avete trovato nella prossima tabella. Nelle prime due righe abbiamo inserito noi i numeri che rappresentano la lunghezza (in quadretti) dei lati del rettangolo; nella terza riga potete inserire voi la lunghezza del lato della piastrella più grande possibile che siete riusciti a trovare. Se volete esplorare altri casi, aggiungete altre colonne sulla destra.

3.

Primo lato	15	15	30	13	39			
Secondo lato	9	10	7	8	27			
Lato delle piastrelle	3							

4. Scegliete UNO di questi rettangoli e raccontateci qui sotto che ragionamenti avete fatto per essere sicuri che non si può piastrellarlo con piastrelle più grandi:

………

………

5. Osservate la tabella: come è collegato secondo voi il numero che sta nella terza riga ai due numeri che gli stanno sopra? Nella prima colonna avete come lato della piastrella il numero 3, che è un divisore sia di 15 che di 9, cioè dei due numeri che rappresentano le lunghezze dei due lati del rettangolo? È sempre vero, anche nelle altre colonne? Da che cosa lo vedete? Dal disegno? Dalla tabella dei numeri? Da tutte e due?

………

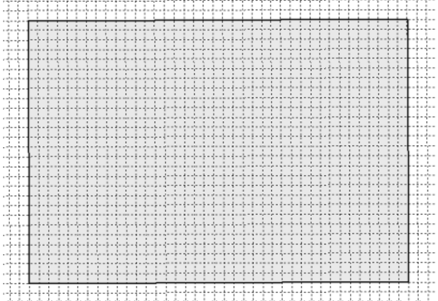
………

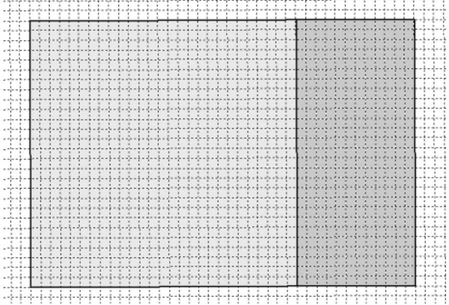
Se questo succede sempre, allora il numero che avete trovato piastrellando il rettangolo con la piastrella più grande possibile è il *Massimo Comun Divisore* dei due numeri che esprimono (in quadretti) la lunghezza dei lati del rettangolo: è un divisore del primo, è anche un divisore del secondo, ed è il più grande fra tutti i numeri che sono divisori contemporaneamente di entrambi.

***

Vi descriviamo adesso un procedimento sistematico che funziona, con un rettangolo qualsiasi, per dividerlo in quadrati tutti uguali e per essere anche sicuri che questi quadrati sono il più grande possibile. Le figure che illustrano il procedimento si riferiscono a un rettangolo con un lato di 39 quadretti e l'altro di 27, ma il bello del procedimento è proprio il fatto che funziona con tutti i rettangoli. Ecco come.

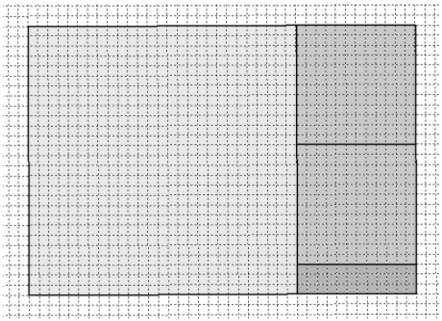
Passo I: costruisci (all'interno del rettangolo) un quadrato che abbia lato coincidente con il ~~uguale al~~ lato più piccolo del rettangolo; se ci sta, costruiscine accanto un altro; se ci sta, un altro ancora; vai avanti finché o copri tutto il rettangolo (e allora abbiamo finito) oppure nel rettangolo che avanza non ci sta più un altro quadrato di quel lato.
Nell'esempio qui sotto, riusciamo a mettere un solo quadrato di lato 27 e rimane un rettangolo di lati 27 e 12 = 39-27.

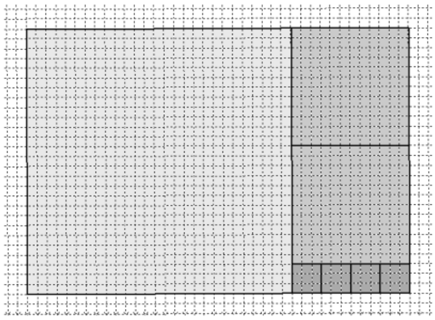




Passo II: ripetiamo la stessa costruzione sul rettangolo che ci è avanzato.

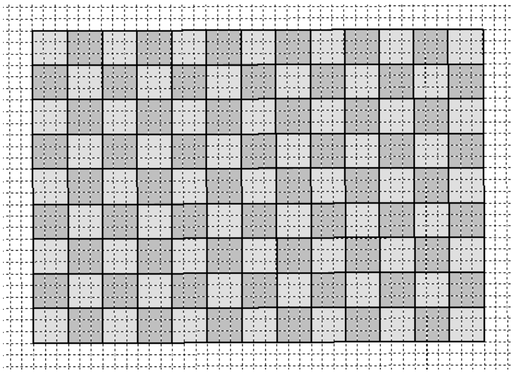
Nell’esempio qui sotto, dobbiamo inserire quadrati di lato 12, finché si riesce, nel rettangolo più scuro, che ha un lato di 27 quadretti e l’altro di 12. Riusciamo a inserirne 2, e ci avanza un rettangolo di lati 12 quadretti e 3 quadretti.





Passo III: continuiamo a ripetere la stessa costruzione sui rettangoli che via via avanzano, finché non troviamo una situazione **in cui non avanza nulla**, come accade qui sopra con il rettangolo di lati 3 e 12 quadretti che si divide esattamente in 4 quadrati di lato 3 quadretti.

Ultimo passo: quando troviamo un rettangolo che si divide **esattamente** in piastrelle quadrate abbiamo finito; con questa ultima piastrella si possono ricoprire esattamente anche i quadrati che avevamo già trovato e quindi tutto il rettangolo da cui si è partiti.



Una maniera per registrare quello che abbiamo fatto, se vogliamo raccontarlo a qualcuno senza dover disegnare tutti i rettangoli, è quella di scrivere questa catena di uguaglianze, che possiamo interpretare proprio come una lista di istruzioni da cui si può risalire ai successivi disegni del rettangolo:

39 = 27□1 + 12   27 = 12□2 + 3   12 = 3□4

6. Provate a rifare questa costruzione negli altri casi che avete registrato nella tabella. Per raccontarci cosa avete fatto, mandateci una catena di uguaglianze come quella che abbiamo scritto qui sopra nel caso di 39 e 27.

15 = 9 □ …….. + ……..   …….. = …….. □ …….. + ……..   …….. = …….. □ …….. + ……..

15 = 10 □ …….. + ……..   …….. = …….. □ …….. + ……..

30 = 7 □ …….. + ……..   …….. = …….. □ …….. + ……..   …….. = …….. □ …….. + ……..

13 = 8 □ …….. + ……..   …….. = …….. □ …….. + ……..   …….. = …….. □ …….. + ……..

…….. = …….. □ …….. + ……..   …….. = …….. □ …….. + ……..

Chiara sostiene che quello che stiamo cercando è il Massimo Comun Divisore fra due numeri e che si poteva evitare di disegnare tutti questi rettangoli e quadrati, ma procedere tenendo conto solo dei numeri. Dice che tutte queste uguaglianze che abbiamo scritto non sono altro che divisioni, le normali divisioni fra due numeri interi, che facciamo quando cerchiamo il quoziente e il resto.

7. Secondo voi Chiara ha ragione? ………………………………
Perché? Come lo spieghereste a un bambino che ha appena imparato come funziona la divisione? *(facoltativo per la V primaria)*

………

………

***

Un'ultima questione.
La maestra Liliana insegna in una prima classe della scuola primaria; oggi è arrivata in classe con ben 90 caramelle e 63 cioccolatini che vorrebbe utilizzare come premio per una gara con i suoi allievi. La gara non ha un solo vincitore, ne ha tanti, ed è proprio la maestra che decide le regole del gioco e può decidere quanti saranno i vincitori. Gli alunni di quella classe sono particolarmente litigiosi, quindi la maestra ha bisogno che ognuno dei vincitori riceva esattamente lo stesso numero di caramelle e esattamente lo stesso numero di cioccolatini. La maestra vorrebbe anche che i vincitori fossero tanti, il maggior numero possibile, sia per non far venire loro l'indigestione, sia per soddisfare il maggior numero possibile di bambini.

8. Quanti vincitori al massimo può prevedere per la gara? ………………………………………………
Quante caramelle e quanti cioccolatini riceverà ciascun giocatore? ……………………………………
Secondo voi questo problema ha qualcosa a che vedere con i rettangoli che avete piastrellato? Se sì, come lo spiegate?

………

………

Scheda risposte classe I secondaria di II grado

Cod docente …………… Cod. classe ………… Gruppo ……………………..

Piastrelliamo i rettangoli

1. Secondo noi ha ragione ……………………………………………………………………………..

2. perché ……….

……

3. Abbiamo completato la tabella qui sotto

Primo lato	15	15	30	13	39			
Secondo lato	9	10	7	8	27			
Lato delle piastrelle	3							

4. *(facoltativo)* siamo sicuri che non si può piastrellarlo con piastrelle più grandi, perché…

……

……

5. Che collegamento c'è tra il numero che sta nella terza riga e i due numeri che gli stanno sopra?

……

……

Il numero collegato al lato del rettangolo si ottiene ……………………………………………………………….

……..

……

6. Ecco per ogni coppia di numeri iniziali la catena di uguaglianze che abbiamo scritto**:**

15 = 9 × …….. + ……..   …….. = …….. × …….. + ……..   …….. = …….. × …….. + ……..

15 = 10 × …….. + ……..   …….. = …….. × …….. + ……..

30 = 7 × …….. + ……..   …….. = …….. × …….. + ……..   …….. = …….. × …….. + ……..

13 = 8 × …….. + ……..   …….. = …….. × …….. + ……..   …….. = …….. × …….. + ……..

…….. = …….. × …….. + ……..   …….. = …….. × …….. + ……..

7. Chiara ha/non ha *(cancellate la risposta sbagliata)* ragione.
(facoltativo per la V primaria) Lo spiegheremmo così:

……

……

……

8. La gara al massimo può prevedere ………………….vincitori.

Ciascun giocatore riceverà ……………… caramelle e ………………… cioccolatini.

Questo problema c'entra con i rettangoli che abbiamo piastrellato , perché………………………………..

……