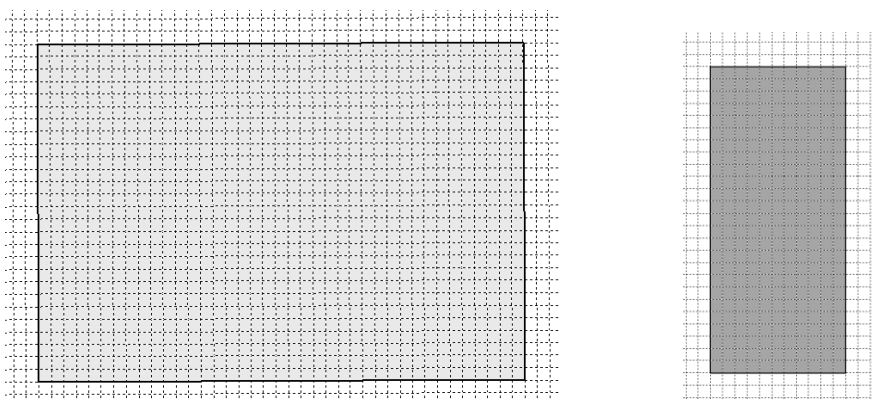


Per la terza classe della scuola secondaria di I grado

Numeri e rettangoli

Qui sotto vedete due rettangoli, disegnati sulla carta a quadretti: il primo ha un lato di 39 quadretti e l'altro di 27; il secondo ha un lato di 11 quadretti e l'altro di 25.

Vogliamo dividerli in quadrati, tutti uguali fra loro, che abbiano per lato un certo numero (intero) di quadretti: pensiamo a questi quadrati come a delle piastrelle e accordiamoci quindi sul fatto che non vogliamo mezze piastrelle. Non è un grosso problema, perché la carta a quadretti li divide già in quadratini, di lato un quadretto; però vorremmo che le piastrelle fossero più grandi possibile; ci va bene anche la divisione in quadratini di lato 1 quadretto, ma soltanto quando siamo sicuri che non si possa fare di meglio.



Provate. Che numeri avete ottenuto come lati della piastrella?

1. Per il rettangolo 39×27 il lato della piastrella più grande possibile secondo noi è
2. Per il rettangolo 11×25 il lato della piastrella più grande possibile secondo noi è

Bisognava proprio disegnare i quadrati o si poteva vedere direttamente dai numeri? Provate a esaminare che caratteristiche deve avere il numero intero x che esprime la lunghezza in quadratini del lato della piastrella rispetto ai due numeri interi a e b che rappresentano la lunghezza (in quadratini) del lato del rettangolo: il numero a deve essere un multiplo di x perché

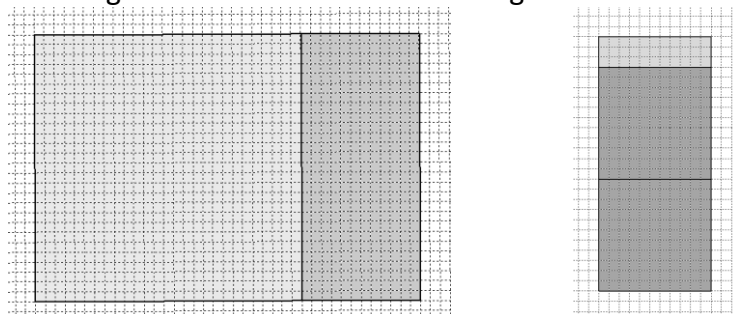
3.

anche b deve essere un multiplo di x per lo stesso motivo. Quindi il numero x è un divisore sia di a che di b ; ma stiamo cercando la piastrella più grande possibile quindi

4. x è

Vi descriviamo ora un procedimento sistematico che funziona, con un rettangolo qualsiasi, per dividerlo in quadrati tutti uguali e essere anche sicuri che questi quadrati sono il più grande possibile. Le figure illustrano il procedimento sui due rettangoli che avete già usato, ma il bello di questo metodo è proprio il fatto che funziona con TUTTI i rettangoli. Ecco come.

Passo I: si parte da un rettangolo di lati a e b ; mettiamoci d'accordo sul fatto di chiamare a il lato più lungo e b il lato più corto. Costruite all'interno del rettangolo un quadrato di lato b ; se ci sta, costruitene un altro; se ci sta, un altro ancora; andate avanti finché o si ricopre tutto il rettangolo (e allora avete finito) oppure nel rettangolo che avanza non ci sta più un altro quadrato di lato b . Nel primo esempio qui sotto, riusciamo a mettere nel rettangolo 39×27 un solo quadrato di lato 27 e rimane un rettangolo di lati 27 e $12 = 39 - 27$. Nel secondo esempio, si possono mettere due quadrati di lato 11 nel rettangolo 11×25 e rimane un rettangolo di lati 11 e $3 = 25 - 11 \times 2$.

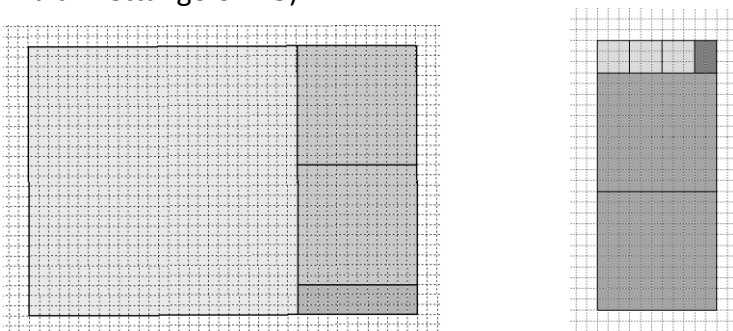


Un'osservazione: possiamo "leggere" nei rettangoli che $25 = 11 \times 2 + 3$ cioè che 25 diviso per 11 dà 2 con il resto di 3; e anche che 39 diviso per 27 dà 1 con il resto di 12. Non è un caso: il procedimento che abbiamo descritto equivale proprio a dividere il numero a per il numero b . Perché? Provate a spiegarlo a un bambino che abbia appena imparato la divisione: dove gli dite di leggere in figura il quoziente e dove il resto?

5.

Passo II: ripetiamo la stessa costruzione sul rettangolo avanzato.

Nel primo esempio che stiamo seguendo, possiamo costruire due quadrati di lato 12 nel rettangolo 27×12 (e avanza un rettangolo 12×3); nel secondo, costruiamo tre quadrati di lato 3 nel rettangolo 11×3 (avanza un rettangolo 2×3).



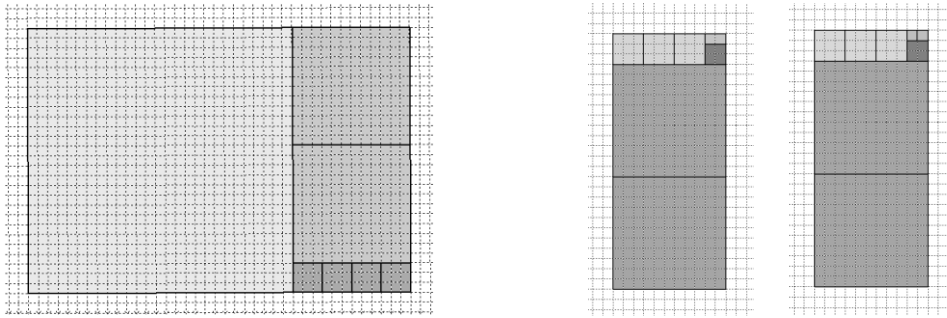
6. Esprimete anche questo passaggio con due divisioni:

Per il primo rettangolo:

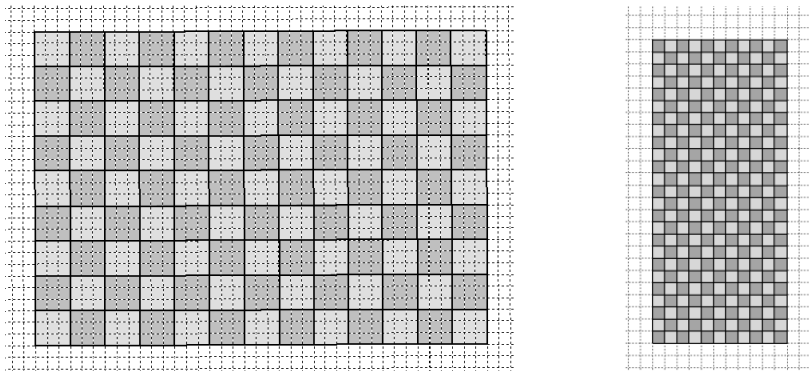
Per il secondo rettangolo:

Passo III: ripetiamo la costruzione sui rettangoli che via via avanzano, finché non troviamo una situazione in cui non avanza nulla, come accade al prossimo stadio nel primo dei due esempi che stiamo illustrando: il rettangolo 3×12 si divide infatti esattamente in quattro quadrati di lato 3 quadretti. Nel secondo esempio occorre un altro passo: nel rettangolo 2×3 si può costruire un

quadrato di lato 2; avanza un rettangolo 2×1 , che questa volta si divide esattamente in due quadrati di lato 1.



Ultimo passo: quando troviamo un rettangolo che si divide esattamente in piastrelle quadrate abbiamo finito: con questa ultima piastrella si possono ricoprire esattamente anche i quadrati che avevamo già staccato e quindi tutto il rettangolo da cui si è partiti.



Provate a discutere fra di voi sui motivi per cui la piastrella così ottenuta ricopre esattamente anche i quadrati grandi già staccati, e su perché non si può fare di meglio (cioè trovarne una più grande). Scrivete qui sotto le argomentazioni che vi sembrano più convincenti.

7.

L'intero procedimento si può descrivere senza usare i rettangoli, ma solo usando i numeri (e prende il nome di *algoritmo delle divisioni successive* o anche *algoritmo euclideo*).

Partendo dai numeri 39 e 27, scriviamo così le divisioni successive:

$39 = 27 \times 1 + 12$	da cui si legge che	39 diviso 27 dà quoziente 1 e resto 12
$27 = 12 \times 2 + 3$	cioè	27 diviso 12 dà quoziente 2 e resto 3
$12 = 3 \times 4 + 0$	cioè	12 diviso 3 dà esattamente 4, con resto 0.

Scrivete qui sotto in maniera analoga le divisioni per il secondo rettangolo (ne occorreranno 4):

8. = × +	 = × +
..... = × +	 = × +

Il penultimo resto che si ottiene (l'ultimo è sempre 0, perché il procedimento termina quando si trova una divisione esatta, cioè proprio con resto 0) rappresenta la lunghezza del lato della piastrella e il massimo comun divisore fra i due numeri a e b : quindi $\text{MCD}(39,27)=3$ e $\text{MCD}(25,11)=1$.

Provate a usare questo procedimento con altre coppie di numeri. Decidete voi, volta per volta, se preferite usare anche i rettangoli, o solo le divisioni per trovare il MCD tra le seguenti coppie di numeri; a noi manderete non solo il risultato finale ma anche la successione di divisioni con cui l'avete ottenuto.

9. $\text{MCD}(50,20)=\dots\dots\dots$

$\text{MCD}(63,90)=\dots\dots\dots$

$\text{MCD}(12456,12454)=\dots\dots\dots$

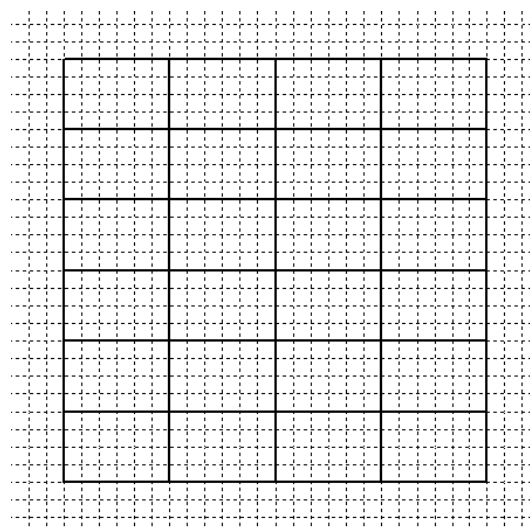
$\text{MCD}(89,55)=\dots\dots\dots$

C'è qualche cosa di strano che avete notato nell'ultimo esempio? Forse vi fa ricordare qualcosa che avevate incontrato nella prima tappa?

.....

.....

Usiamo ancora i rettangoli sulla carta a quadretti per un'altra costruzione, continuando a chiamare a e b i due numeri interi che rappresentano la lunghezza (in quadretti) dei lati del rettangolo. Questa volta utilizzate l'intero rettangolo come una piastrella, e immaginate molte piastrelle identiche da accostare (senza ruotarle) fino a formare un quadrato. Qui sotto un esempio con $a=6$ e $b=4$:



È sempre possibile ottenere un quadrato, come abbiamo fatto qui sopra, di lato $a \times b$. Però cerchiamo un quadrato che sia il più piccolo possibile; a volte non si riesce a fare di meglio di $a \times b$, ma a volte (come anche in questo caso!) sì.

Se y è la lunghezza (in quadretti) del lato del PIÙ PICCOLO quadrato che si può realizzare in questa maniera, che cosa rappresenta il numero y rispetto ai due numeri a e b ?

10. y è

Scheda risposte classe III sec. di 1° grado

Cod docente Cod. classe Gruppo

Numeri e rettangoli

1. Per il rettangolo 39×27 il lato della piastrella più grande possibile secondo noi è
.....
2. Per il rettangolo 11×25 il lato della piastrella più grande possibile secondo noi è
.....
3. Il numero a deve essere un multiplo di x perché
.....
4. x è
5. Il procedimento che abbiamo descritto equivale proprio a dividere il numero a per il numero b perché.....
.....
6. Esprimiamo il passaggio del passo II con le seguenti divisioni:

Per il primo rettangolo:

Per il secondo rettangolo:
7. Abbiamo discusso fra di noi sui motivi per cui la piastrella così ottenuta ricopre esattamente anche i quadrati grandi già staccati, e su perché non si può fare di meglio (cioè trovarne una più grande). Ecco alcune delle argomentazioni più convincenti:
.....
.....
8. Scriviamo qui sotto le divisioni per il secondo rettangolo:

..... = $\times$ +
..... = $\times$ +
..... = $\times$ +
..... = $\times$ +

9.

$\text{MCD}(50, 20) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$ $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$

$\text{MCD}(63, 90) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$ $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$ $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$

$\text{MCD}(12456, 12454) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$ $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$

$\text{MCD}(89, 55) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$ $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$ $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$
 $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$ $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$ $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$
 $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$ $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$ $\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots + \dots\dots$

L'ultimo esempio ci fa venire in mente $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

10. Se y è la lunghezza (in quadretti) del lato del PIÙ PICCOLO quadrato che si può realizzare in questa maniera, y è $\dots\dots\dots$ tra a e b