Gruppo per la scuola elementare
Dipartimento di Matematica
“Federigo Enriques”
Università degli Studi di Milano

I mosaici nell’insegnamento della geometria elementare

Una proposta di

Nilla Bonissoni
Paola Ghiringhelli
Luisa Pennati
Luisa Pirovano
Germana Sorrento
Gemma Testin

Coordinatore Ernesto Rottoli

Introduzione

“Non ricerca sull’insegnamento ma ricerca nell’insegnamento” [Freudenthal]

“Per i bambini la geometria inizia con il gioco” [van Hiele]

“La geometria è un’abilità degli occhi e delle mani come pure della mente” [Del Grande]

Questo fascicolo raccoglie materiali e risultati di un lavoro di ricerca svolto negli anni scolastici 2000-01 e 2001-02 in alcune scuole della Lombardia.
Il lavoro ha preso avvio dalla lettura di articoli pubblicati su riviste di didattica della matematica; le indicazioni ed i suggerimenti ricavati sono stati applicati nelle classi al fine di verificarne l’efficacia e di sperimentare adattamenti ed estensioni suggerite dall’operare concreto.

Questo modo di procedere rispecchia la nostra concezione di ricerca nell’insegnamento: una ricerca centrata sul lavoro nella classe, da una parte aperta alle proposte ed alle informazioni fornite dalla cultura globale e dall’altra pervasa dalla convinzione dell’importanza di porre in rilievo quelle “schegge” di innovazione che danno valore alla specificità del nostro insegnamento e lo rendono più vivo ed efficace.
Mettere a disposizione, attraverso questo fascicolo, le osservazioni ricavate nel nostro operare appare quindi come una condizione necessaria per avere parte attiva in una scuola che si avvia ad essere globale e per evitare un atteggiamento passivo di omologazione.

La ricerca nell’insegnamento appare come condizione necessaria per la costruzione di una scuola democratica, una scuola nella quale gli alunni vivano l’insegnamento “come un’avventura personale nel paese dell’intelligenza e della disciplina, ereditata da tutta l’umanità e condivisa con essa” [Hannaford].

Il fascicolo è suddiviso in tre parti:

I. premesse e modalità
II. proposte di lavoro
III. articoli di riferimento.

I. Premesse e modalità

Nella prima parte vengono presentate le premesse e le modalità intorno alle quali si è andato coagulando l'intero progetto di ricerca. In particolare sono esposti i raggruppamenti definiti negli incontri tra gli insegnanti che hanno partecipato alla ricerca e che hanno costituito il riferimento principale nell'organizzazione delle diverse attività svolte nelle classi. In seguito sono mostrati i mosaici utilizzati nel corso delle diverse attività e le griglie di base adoperate in attività di costruzione e di successiva osservazione ed analisi delle proprietà delle figure.

Viene infine riportato un test di memoria visiva che è stato somministrato ai bambini in ingresso in prima elementare, sotto forma di intervista individuale.

II. Proposte di lavoro

La seconda parte è costituita da sei relazioni su proposte di lavoro sperimentate nelle diverse classi coinvolte nella ricerca. Ciascuna di queste proposte si differenzia dalle altre o per l'età degli alunni ai quali l'attività è rivolta, o per i tipi di mosaici utilizzati, o per le specifiche abilità interessate. Nonostante i riferimenti comuni stabiliti negli incontri tra gli insegnanti, si è cercato di rispettare la diversità dei tipi di intervento, diversità dovuta alle differenti esperienze dei singoli insegnanti ed ai differenti contesti nei quali essi hanno operato. Questa diversità viene percepita immediatamente alla lettura e, riteniamo, potrebbe essere sorgente di suggerimenti per un lavoro di riflessione che porterà ad un'ulteriore e più efficace sistemazione. Riassumiamo brevemente i contenuti delle singole proposte

a. La prima raccoglie osservazioni su un'attività con i mosaici svolta in una classe prima.
b. La seconda riferisce quanto osservato nel confronto tra i risultati ottenuti in una classe prima e quelli ottenuti in due classi del secondo ciclo.
c. La terza riguarda principalmente un'attività sulla creatività svolta in una classe quarta e in una quinta; vengono riportati i dati raccolti.
d. La quarta è costruita sulle osservazioni dei bambini di una classe quarta e di una quinta riguardo alle strategie da loro utilizzate nelle attività di libera creatività e di memorizzazione ed alle difficoltà incontrate nella dettatura di un'immagine da loro creata.
e. La quinta riporta osservazioni su risultati e difficoltà incontrate da alunni di quarta e quinta classe in attività di piegatura, di utilizzo delle griglie, di ricostruzione e di memorizzazione con mosaici a sette pezzi.

f. La sesta è costituita da un insieme di proposte relative all'utilizzo del tangram cinese, costruito su griglia quadrata, in attività che riguardano l'equiestensione ed i rapporti tra le aree di figure diverse.

III. Articoli di riferimento

Nella terza parte sono raccolti gli articoli più significativi dei quali ci siamo serviti come riferimento nelle diverse attività

a. L'articolo di Del Grande sintetizza in modo efficace le abilità coinvolte nel concetto di "senso dello spazio"; in particolare mette in rilievo l'interdipendenza tra i miglioramenti nelle abilità spaziali e l'apprendimento della geometria.

b. L'articolo di Wheatley sottolinea l'importanza di fornire ai bambini l'opportunità di sviluppare ed usare "images": esse sottostanno sia al senso del numero che al senso dello spazio e sono quindi un costrutto fondamentale.

c. L'articolo di Djament presenta semplici mosaici da utilizzare con bambini di 5-6 anni in un'attività di pre-matematica che ha lo scopo di evitare che si installino nelle loro menti degli stereotipi che legano le proprietà delle figure alla loro disposizione nel piano.

d. L'articolo di Dunkels riporta le tappe della costruzione del tradizionale tangram cinese a sette pezzi.

e. L'articolo di van Hiele mostra come un particolare mosaico a sette pezzi, costruito su una griglia esagonale, possa essere utilizzato per evitare alcuni "misconcetti" nell'insegnamento della matematica e per favorire, attraverso il gioco e la creatività, lo sviluppo dei livelli del pensiero geometrico.

Le esperienze qui riferite hanno interessato le seguenti classi:

- la classe prima della scuola elementare Edmondo De Amicis di Locate di Ponte S. Pietro (Bergamo)
- classi terze, quarte e quinte della scuola elementare "A. Scarpa" di via Clericetti di Milano
- classi terze, quarte e quinte della scuola elementare di Casatenovo.

Ringraziamo Paola Cereda, Maria Dedò e Simonetta Di Sieno per l'attenta lettura del testo ed i preziosi suggerimenti.

INDICE

PARTE PRIMA: Premesse e modalità

PARTE SECONDA: Proposte di lavoro

PARTE TERZA: Articoli di riferimento

Parte Prima

Premesse e modalità

SCHEDA INTRODUTTIVA DELLE ATTIVITÀ SVOLTE IN CLASSE

La prima parte è strutturata nei seguenti punti:

1. Organizzazione delle attività

Durante gli incontri mensili, gli insegnanti che hanno partecipato alla ricerca hanno fatto riferimento, per la stesura del piano di lavoro e l'organizzazione delle diverse attività da svolgere nelle proprie classi, al seguente schema:

- Presentazione e osservazione del mosaico: riconoscimento delle figure indipendentemente dall'orientamento e dalla disposizione nello spazio; riconoscimento tattile; analisi delle proprietà (angoli, superfici: equiestensione, similitudine).
- Costruzione: costruzione (con diverse tecniche) dei pezzi dei mosaici: disegno su griglie, ritaglio, piegature, modifiche di mosaici proposti dall'insegnante.
- Creatività: creazione di figure da parte dei bambini, liberamente o con titolo assegnato, a partire dai pezzi dei mosaici costruiti.
- Ricostruzione: ricomposizione di un'immagine della quale sono evidenziati i vari pezzi che la formano oppure soltanto il contorno.
- Memorizzazione: ricostruzione di un'immagine dopo averla vista per pochi secondi oppure ritaglio di una figura lungo le linee indicate e poi ricostruzione della stessa senza averla in vista.

Accanto a ciascun indicatore vengono esposte le modalità generali relative alle diverse attività ed alcune ipotesi inerenti alle abilità coinvolte in ciascuna di esse. Lo schema di presentazione delle attività adottato nel capitolo successivo rispecchia non tanto la successione temporale esatta della stesse quanto questa suddivisione.

2. I mosaici

Tipi di mosaici utilizzati (i nomi associati sono quelli degli autori degli articoli dai quali i mosaici sono stati ricavati):

- i Mosaici di Brown e Wheatley
- i Mosaici di Djament
- il Tangram Cinese (tradizionale)
- il Mosaico di Van Hiele
- estensioni di mosaici, talvolta create dai bambini stessi.

3. Le griglie

Sono riportati tre tipi di griglie: la griglia triangolare, la griglia quadrata e la griglia esagonale, vista l’importanza delle stesse nella costruzione dei mosaici, nella registrazione delle figure costruite, nel confronto e nell’analisi delle proprietà delle figure.

(Ricordiamo che triangolo equilatero, quadrato ed esagono regolare sono gli unici poligoni regolari con i quali si può tassellare il piano indefinitamente).

4. Il test

Viene riportato un test di valutazione di alcune abilità relative al senso dello spazio, che può essere proposto nel passaggio dalla scuola materna alla scuola elementare.

1. ORGANIZZAZIONE DELLE ATTIVITÀ

Facendo riferimento alla suddivisione precedentemente esposta, evidenziamo le attività specifiche, le riflessioni, le abilità coinvolte e gli obiettivi che ci si prefigge di raggiungere con questa proposta.

Presentazione e osservazione del mosaico

❖ Introduzione al mosaico

- Il mosaico viene presentato come un quadrato formato da varie figure geometriche
- Ogni bambino ha il suo mosaico ed è sollecitato a manipolarlo

Nella discussione si stimola una riflessione su:

- il numero dei pezzi con cui è stato formato
- la dimensione dei pezzi
- quali pezzi formano il mosaico
- le forme tra loro simili (approccio informale)
- le forme tra loro diverse (approccio informale)

❖ Riconoscimento tattile

Un pezzo del mosaico viene messo nel sacchetto
Il bambino deve riconoscerlo al tatto ed indicarlo sul modello
Nel sacchetto vengono messi

- pezzi di forma diversa
- pezzi di forma uguale
- tutti i pezzi

❖ Analisi delle proprietà delle figure

- Individuazione delle proprietà geometriche dei pezzi
- Nome del poligono
- Caratteristiche specifiche dei poligoni
    - lati – angoli
    - simmetrie
    - similitudini e diversità
    - equiestensione

Tali proposte di lavoro consentono di strutturare:
- *l'idea di forma geometrica*
- *la costanza percettiva della forma*
- *la percezione della posizione del pezzo nello spazio*
- *le relazioni spaziali tra i pezzi*
- *la discriminazione visiva, individuando uguaglianze e differenze*
- *le proprietà geometriche delle figure*

Costruzione

❖ Materiale

Il disegno può essere effettuato su

- fogli a quadretti di 1 cm di lato
- fogli a quadretti di 0,5 cm di lato
- griglia con triangoli equilateri
- fogli bianchi

❖ Disegno

Si chiede al bambino di copiare il mosaico seguendo:

- il modello posto vicino
- le indicazioni verbali dell'adulto e per imitazione
- solo le indicazioni verbali date dall'adulto
- le indicazioni verbali date da un compagno

❖ Ritaglio

Viene chiesto ai bambini di ritagliare il disegno del mosaico precedentemente fatto.

❖ Origami

a. Riproduzione per piegature

Dato un foglio quadrato si chiede al bambino di "disegnare" il mosaico effettuando solo delle piegature. Le indicazioni sono:

I. quelle date dall'adulto, sia verbali che come modello di azione;

II. solo verbali;

III. dato il mosaico già piegato, i bambini devono individuare le strategie per ottenerlo (procedono per tentativi ed errori).

b. Vengono date indicazioni sia verbali che con modello d'azione per ottenere, attraverso successive piegature, le varie forme geometriche che compongono il mosaico. Si può anche dare ai bambini un foglio dove sono disegnati i vari passaggi da effettuare. Ciò comporta la comprensione dei codici legati alle procedure dell'origami.

La gradualità delle consegne date ai bambini consente di raffinare le seguenti abilità:

- *grafo-manuale*
- *attenzione prolungata*
- *utilizzo di strumenti tecnici*
- *competenza terminologica*
- *precisione verbale*
- *attenzione alle modalità comunicative*
- *controllo di più variabili*

Creatività

Con i mosaici costruiti dai bambini ora si possono proporre le seguenti attività:

- costruzione libera di figure
- caratterizzazione del proprio elaborato con:
    - aggiunte grafiche
    - spiegazioni scritte
    - un semplice titolo
- costruzione a tema
- costruzione di un mosaico modificando quello proposto dall'insegnante
- costruzione di mosaici liberi

Il materiale raccolto permette di:

- *operare confronti tra rappresentazioni diverse di uno stesso soggetto (casa, ecc.)*
- *osservare l'uso diverso delle forme geometriche per ottenere effetti uguali (il quadrato è uguale a due triangoli; il triangolo grande è uguale ad un trapezio più un triangolo piccolo; ...)*
- *fornire occasioni di interpretazioni diverse di uno stesso elaborato, a seconda dei diversi punti di vista.*

Ricostruzione

- Ricostruzione del mosaico base
    - con il modello a lato
    - con indicazioni verbali
    - senza indicazioni né modello
- Ricostruzione di immagini date con la visualizzazione dei vari pezzi
- Ricostruzioni di immagini dove è evidenziato solo il contorno della figura, senza suddivisione interna
- Ricostruzione di immagini seguendo solo le indicazioni verbali date da un adulto o da un compagno

Tali proposte consentono di:

- *consolidare l'idea di forma geometrica*
- *consolidare la percezione della posizione del pezzo nello spazio*
- *consolidare la padronanza delle relazioni spaziali tra i pezzi*
- *consolidare la padronanza delle relazioni spaziali tra le grandezze dei pezzi*
- *prestare attenzione ai particolari dell'immagine*
- *prestare attenzione alle proporzioni dell'immagine*
- *prestare attenzione all'uso di un linguaggio chiaro ed indicativo*
- *prestare attenzione all'uso del linguaggio geometrico*

Memorizzazione

L'immagine viene presentata per alcuni secondi (da 3 a 5 a seconda dell'età e della complessità dell'immagine), poi ne viene richiesta la ricostruzione.
L'immagine proposta può presentare:

- la visione dei pezzi che la formano
- la figura in ombra (all'interno non appaiono le forme che la compongono)

Tali proposte di lavoro consentono un esercizio di:

- *concentrazione*
- *attenzione*
- *memorizzazione*
- *memorizzazione come associazione di immagini*
- *strutturazione di strategie personalizzate di lavoro*

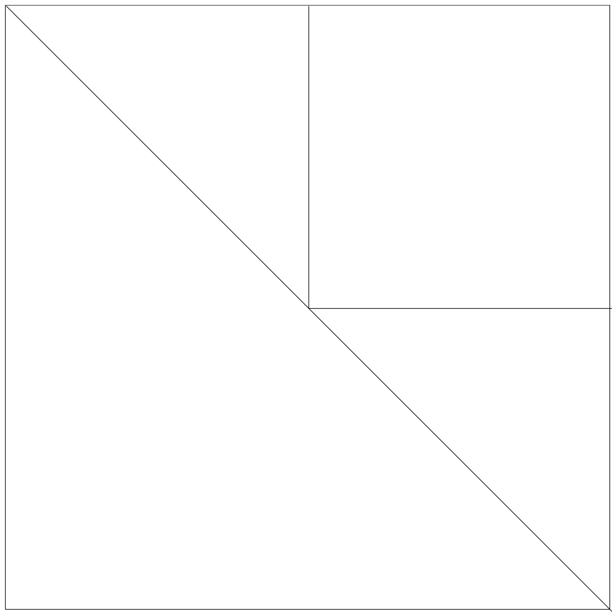
Al termine della proposta di lavoro, per favorire quanto sopra elencato, si prevedono i seguenti momenti:

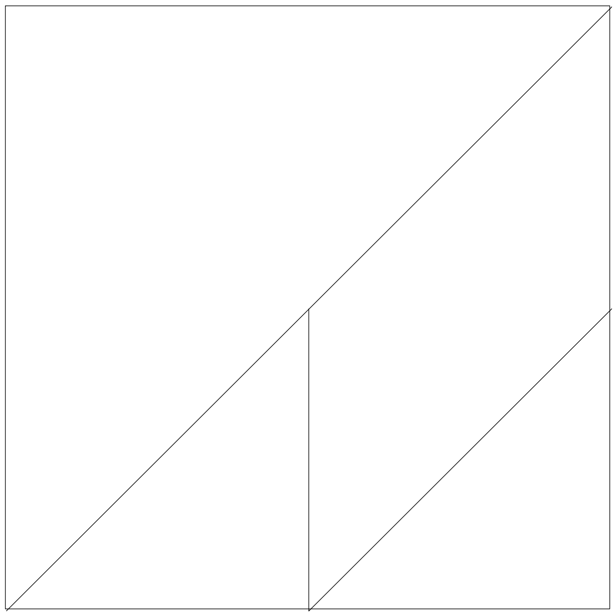
- *analisi del modello proposto*
- *rilevazione degli errori*
- *discussione sulle tipologie di errori*
- *discussione sulle strategie di memorizzazione usate.*

2. TIPI DI MOSAICI UTILIZZATI NELLE DIVERSE ATTIVITÀ

Mosaici di Brown Wheatley

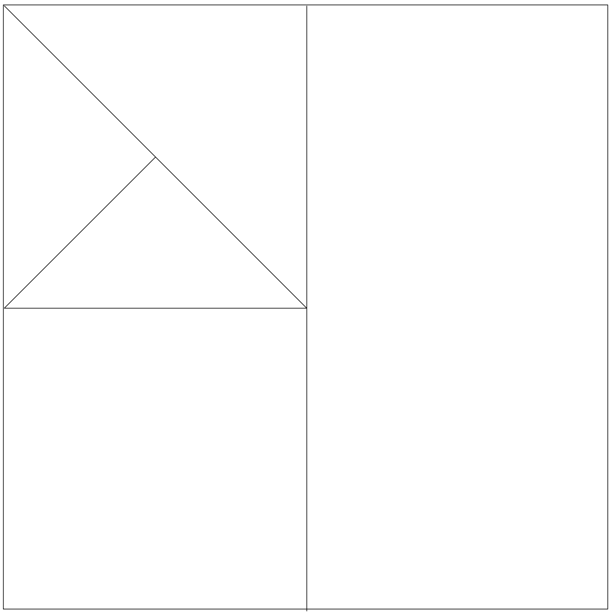
(da *Focus on Learning Problems in Mathematics,* (1997) 19, 1, Pag. 56)

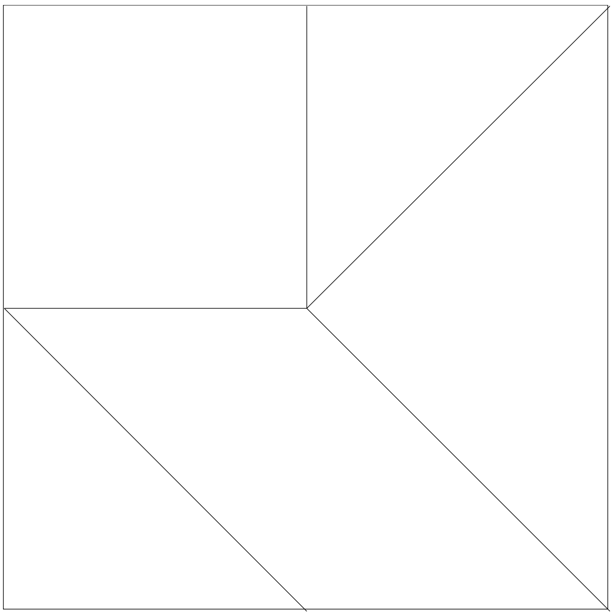




Sono due mosaici a quattro pezzi. Il secondo però è reso più complicato dalla presenza di un pezzo, il parallelogramma, che non ha assi di simmetria.

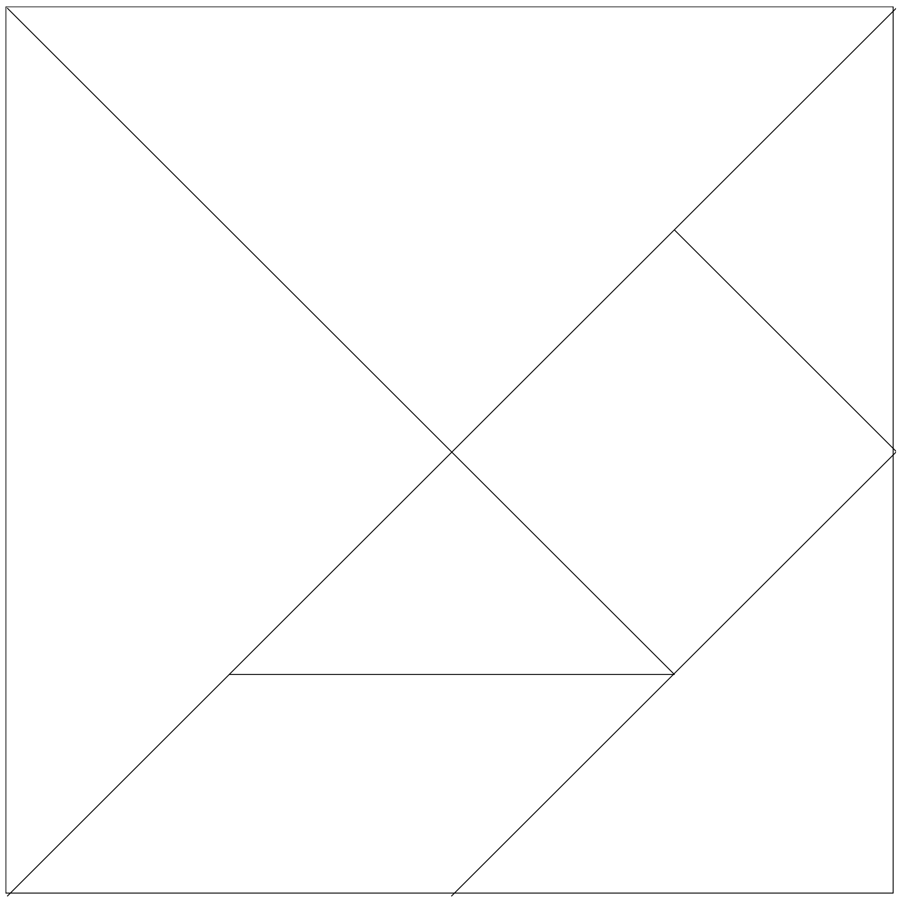
Mosaici di Djament



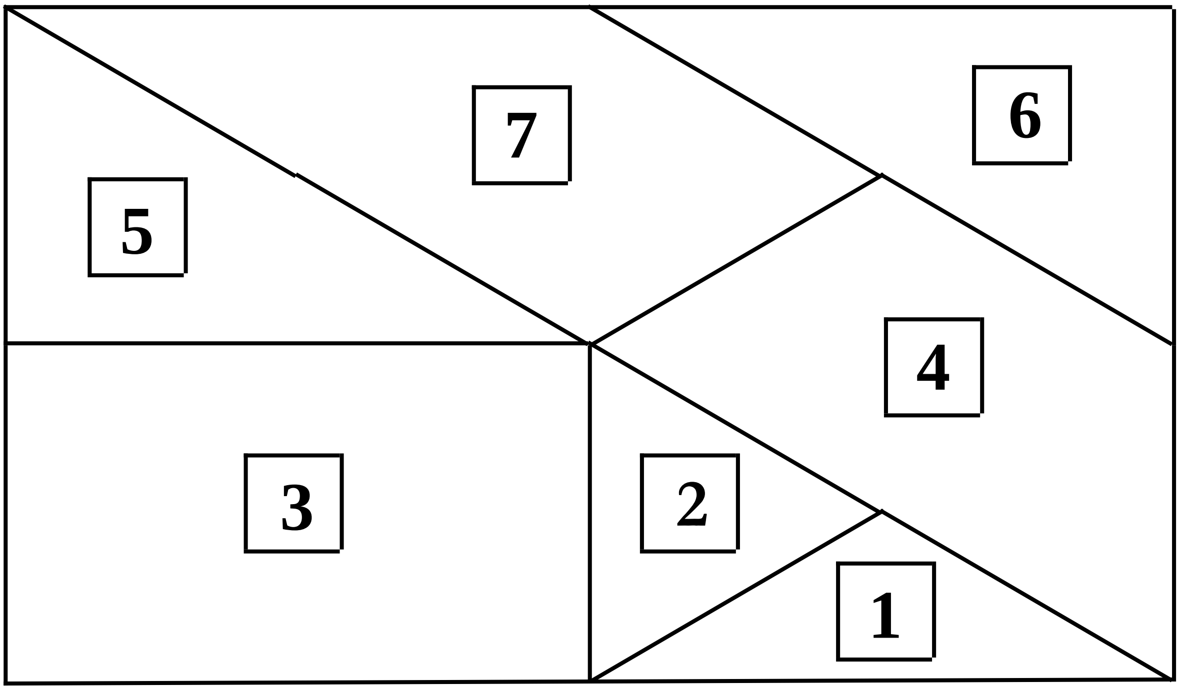


Questi due mosaici hanno cinque pezzi. Il secondo però è reso più complicato dalla presenza di un pezzo, il parallelogramma, che non ha assi di simmetria.

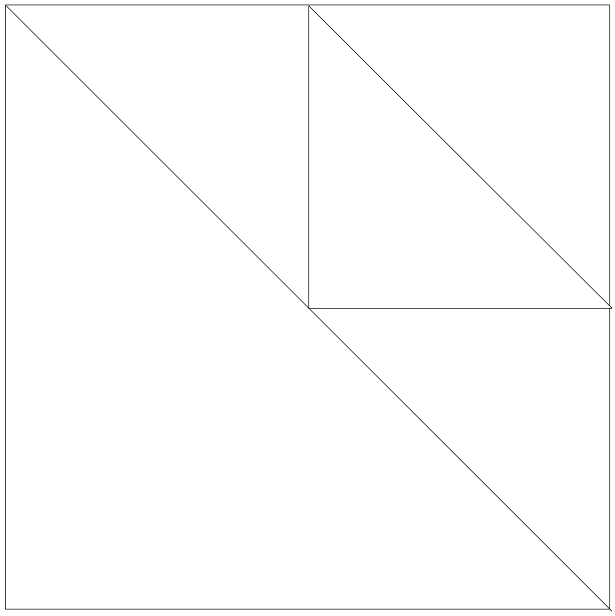
Il tangram cinese tradizionale

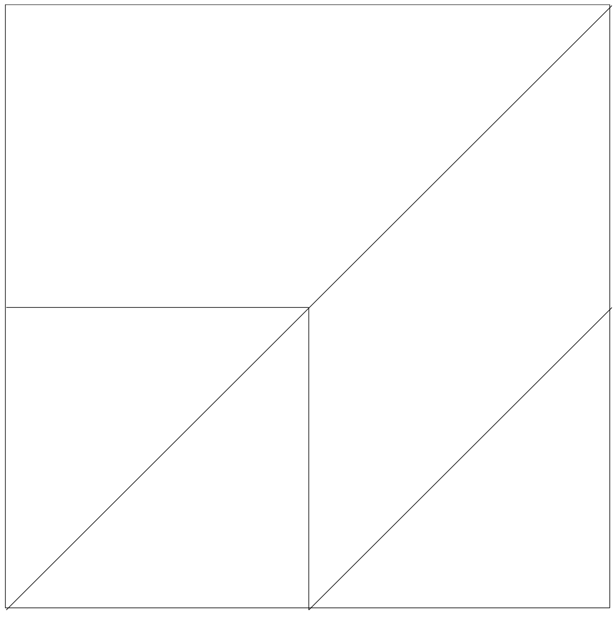


Mosaico di Van Hiele



Esempi di modifiche dei mosaici più semplici



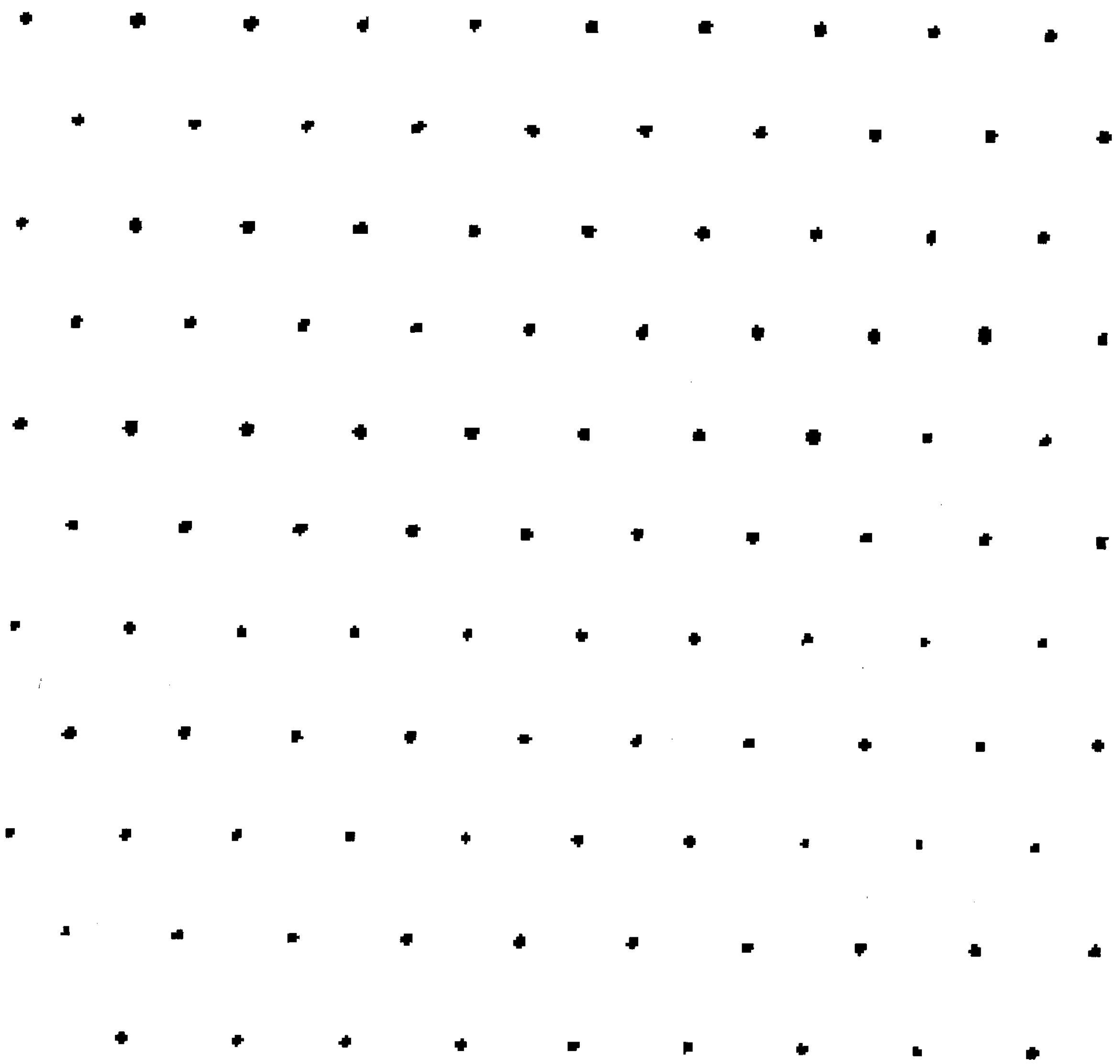


3. GRIGLIE

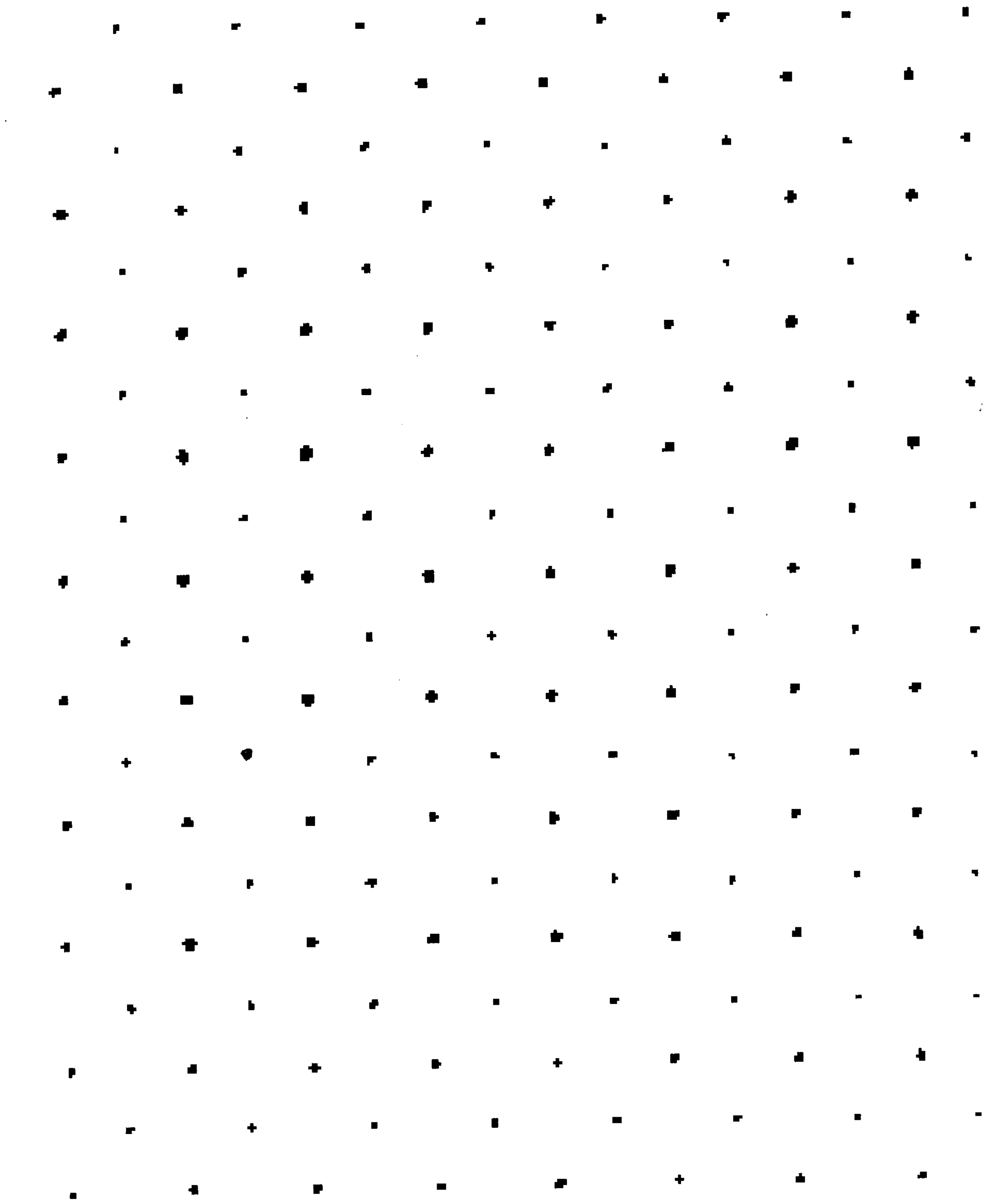
Le griglie sono uno strumento importante nella costruzione dei mosaici, nella rappresentazione, nell’analisi e nel confronto delle figure costruite.

Riportiamo qui tre tipi di griglie.

Griglia triangolare



Griglia quadrata



Griglia esagonale

4. TEST SULLA MEMORIA VISIVA

"Nelle classi della scuola materna la maggior parte dell'apprendimento avviene attraverso stimoli visivi"
[Dunlap e Kalmey]

Ingresso alla scuola elementare

Abilità mnemoniche di tipo visivo da verificare

Dall'articolo di Dunlap – Kalmey abbiamo ricavato i seguenti test:

1) Percezione figura sfondo
   a) Chiusura visiva
      Capacità di completare una figura

2) Discriminazione visiva
   Capacità di distinguere somiglianze e differenze tra oggetti

3) Memoria visiva
   a) Riproduzione della forma
      Capacità di riprodurre un'immagine vista

   b) Memoria visiva sequenziale
      Capacità di ricordare una serie di segnali nella loro sequenza corretta

Inoltre dall'articolo di **Beutelspacher** abbiamo ricavato questi altri due tipi di test:

4) Rielaborazione dell'immagine
   a) Riconoscimento di simmetrie

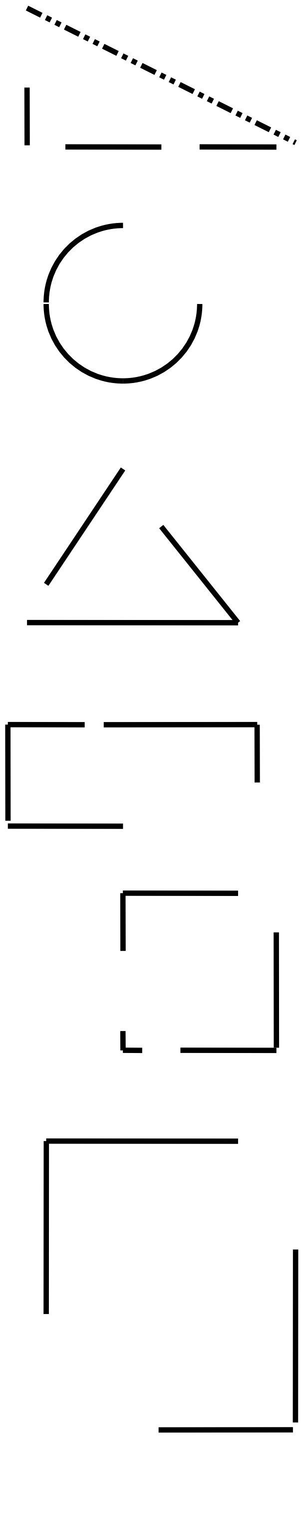
   b) Ricostruzione di simmetrie

Questi test sono stati proposti in forma di intervista individuale nel primo mese di scuola nella classe prima.

Chiusura visiva

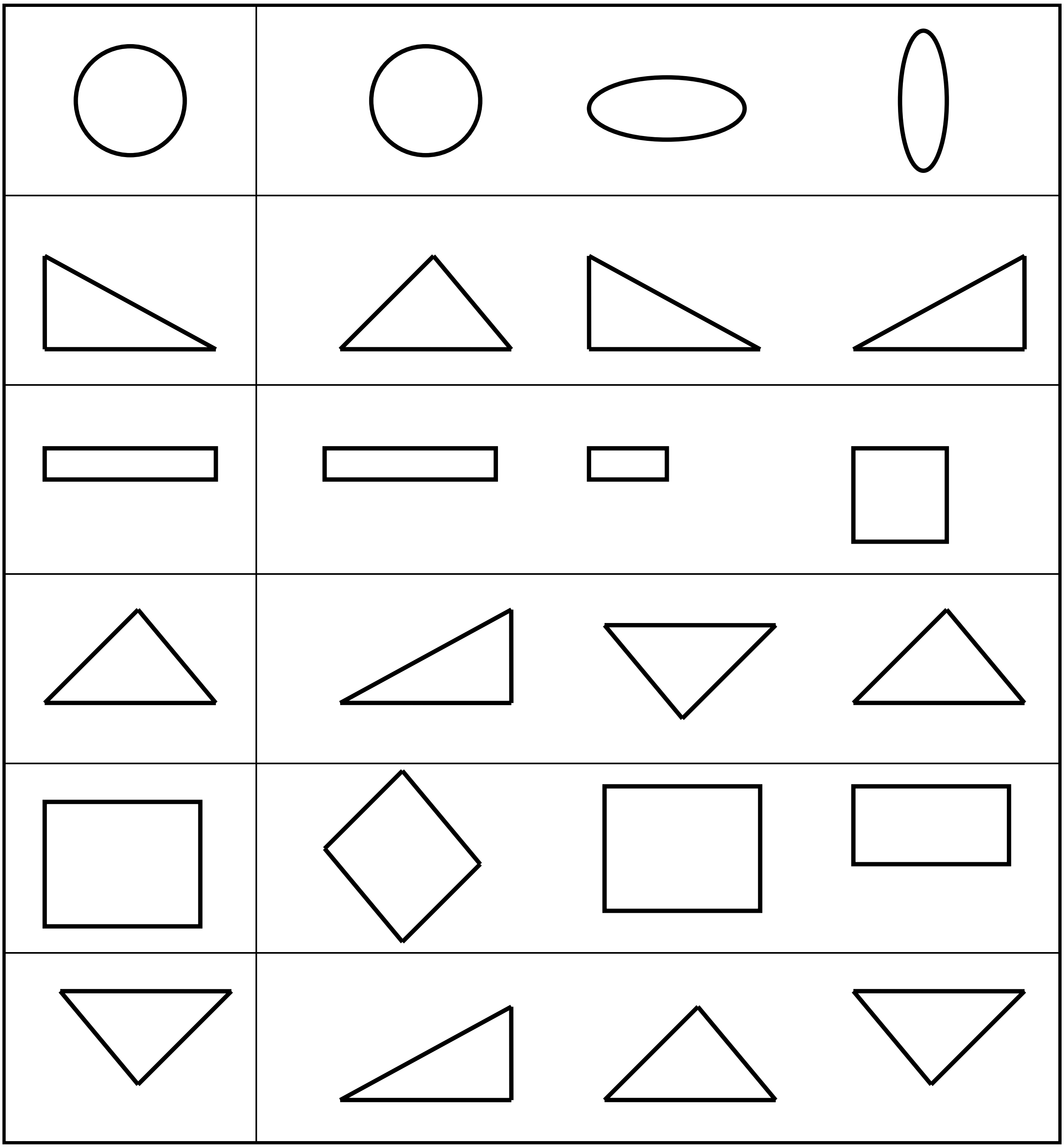
a) L'insegnante mostra per tre secondi una figura.

b) Il bambino ha 5 secondi per identificare verbalmente la figura o per disegnarla se non la conosce.



Discriminazione visiva

a) L'insegnante mostra per tre secondi una figura geometrica.
b) Il bambino ha 5 secondi di tempo per scegliere la figura dalle tre che appaiono nella striscia a destra.
c) Se la risposta è corretta si passa alla figura successiva, altrimenti si esamina la figura.

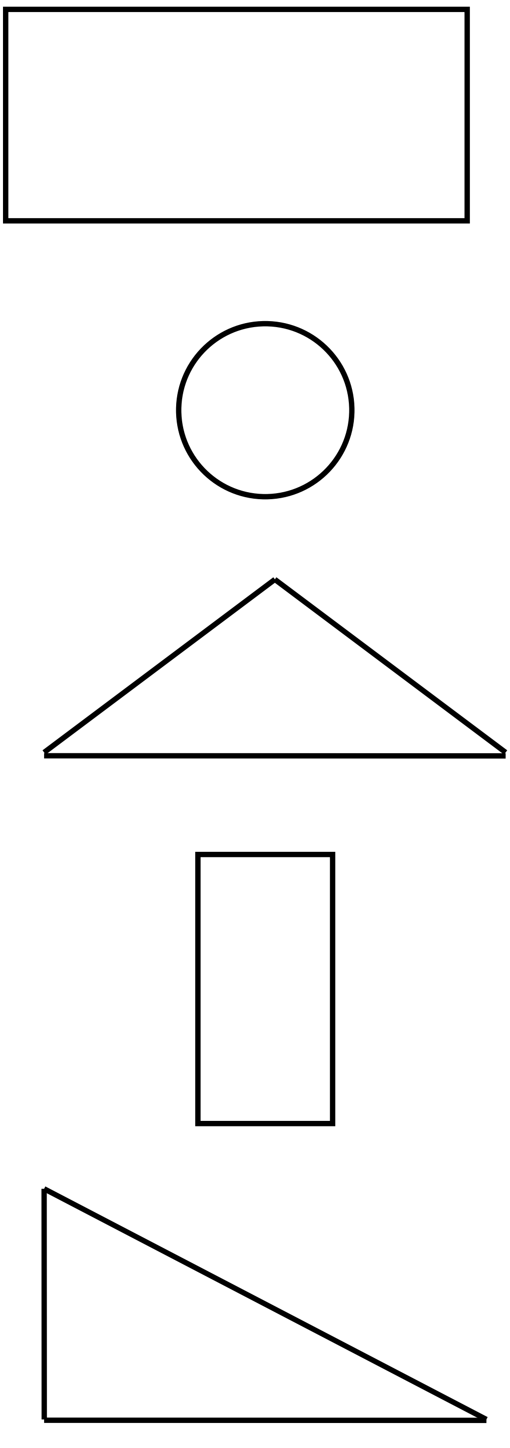


Memoria visiva

Riproduzione della forma

a) L’insegnante mostra una figura alla volta per tre secondi.

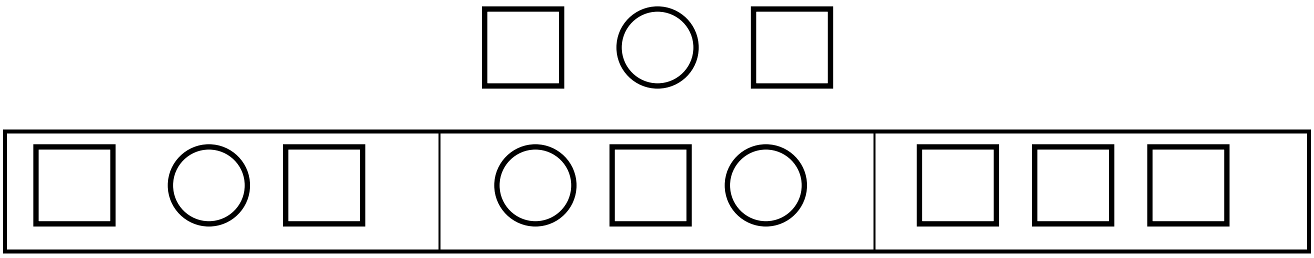
b) Il bambino riproduce sul foglio la forma della figura.

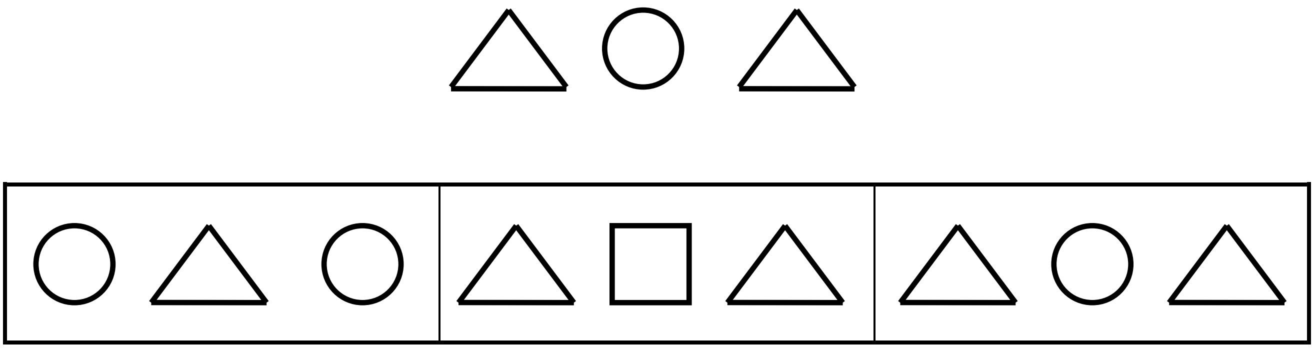


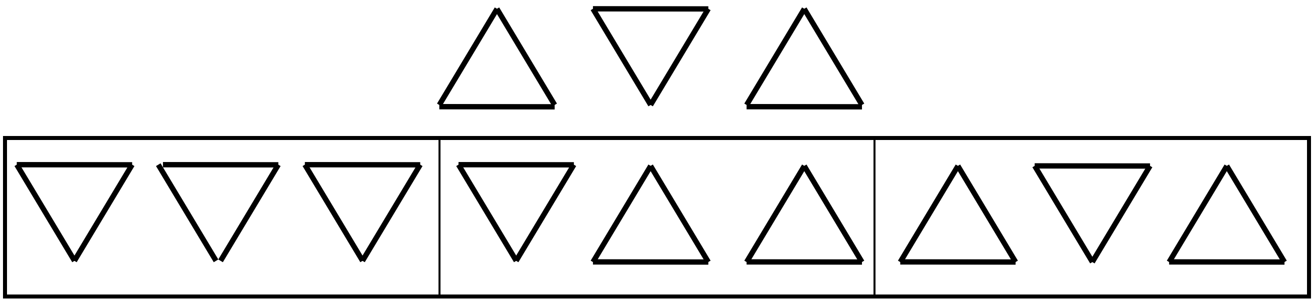
Memoria visiva sequenziale

a) L'insegnante mostra al bambino per tre secondi un insieme di tre figure.

b) L'insegnante gli mostra i tre insiemi di tre figure associate e chiede al bambino di scegliere l'insieme visto in precedenza .





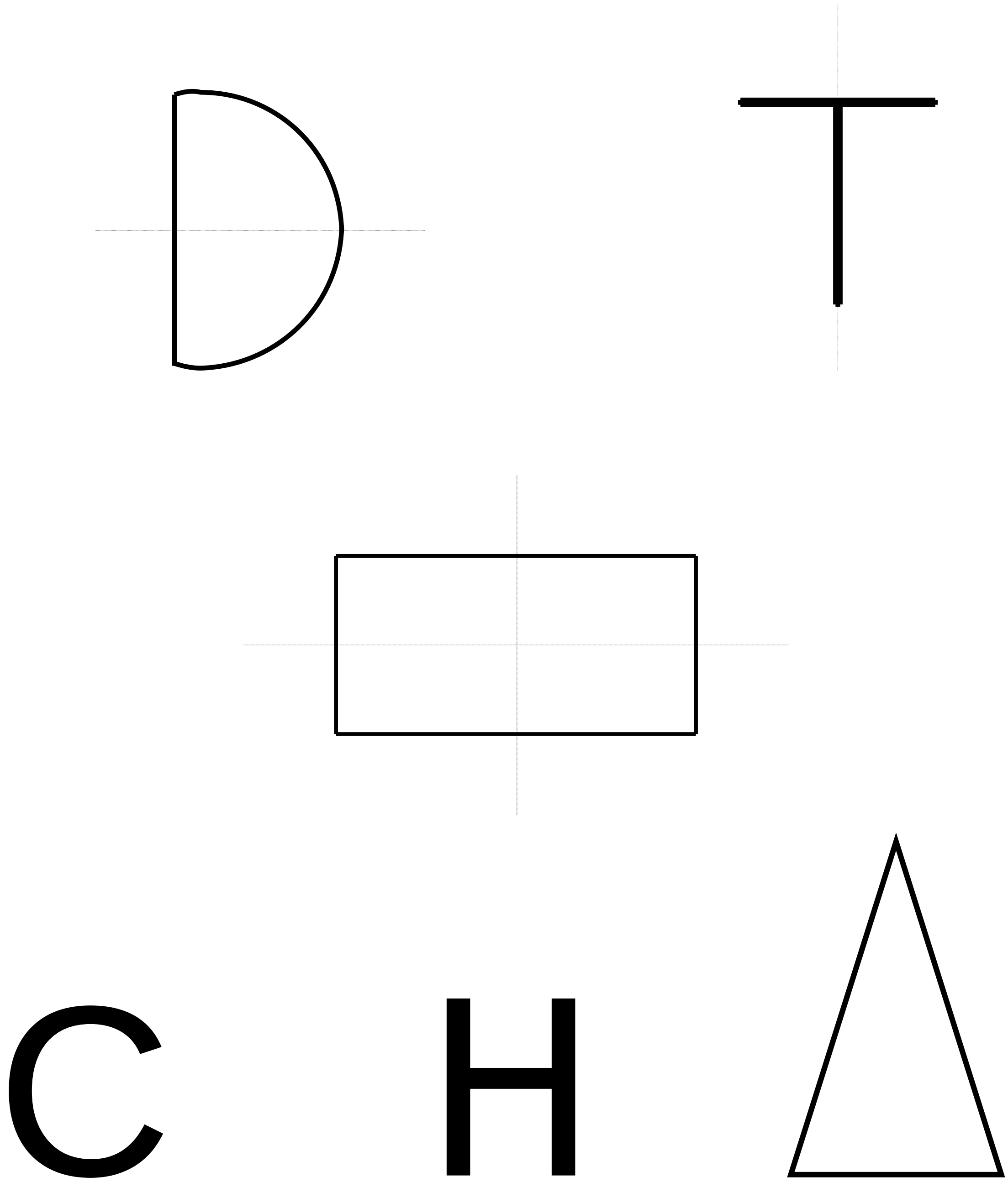


2 1 3

1 2 3	**3 1 2**	**2 1 3**

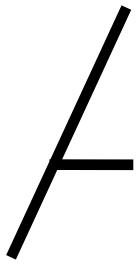
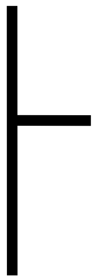
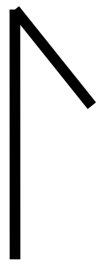
Riconoscimento di simmetrie

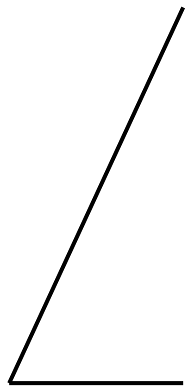
a) L’insegnante mantiene lo specchio sulla linea tratteggiata delle prime tre figure in modo che si veda la figura intera.
b) Il bambino dispone lo specchio sulle successive tre figure in modo che ciascuna figura venga vista intera.



Ricostruzione di figure simmetriche

a) Il bambino cerca prima di indovinare quale sarà la figura completa.
b) La risposta può essere verbale se il bambino conosce il nome della figura, altrimenti il bambino cerca di riprodurre manualmente la figura intera.
c) Per tentativi ed errori il bambino orienta uno specchietto fino a scoprire l'inclinazione e la posizione che gli permettono di ricostruire l'intera figura.



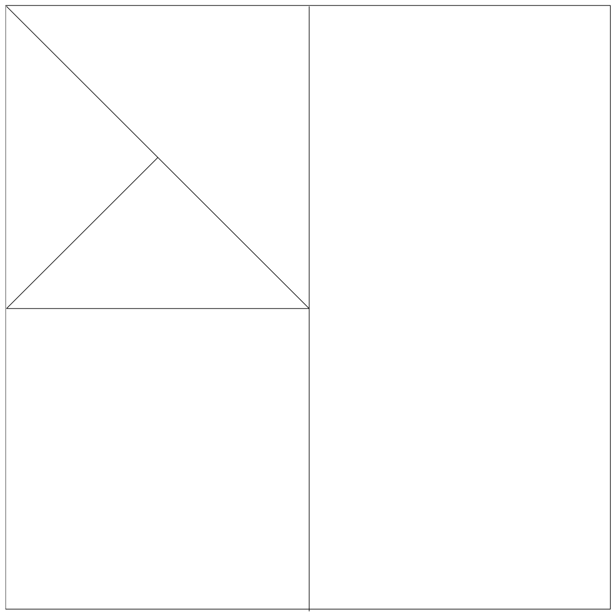
Parte Seconda

Proposte di lavoro

1. I PROPOSTA DI LAVORO

Attività con i più piccoli

Ai bambini della classe prima, l'insegnante ha proposto il seguente mosaico, ricavato dall'articolo di Djament:



Le attività svolte sono state le seguenti:

- Costruzione dei pezzi del mosaico mediante ritaglio
- Creatività: utilizzando i pezzi del mosaico, i bambini creano liberamente figure
- Ricostruzione di un'immagine della quale sono evidenziati i pezzi che la formano
- Memorizzazione: ritagliare una figura e ricostruirla senza averla più in vista
- Riconoscimento sia di pezzi che di semplici figure globali.

Costruzione

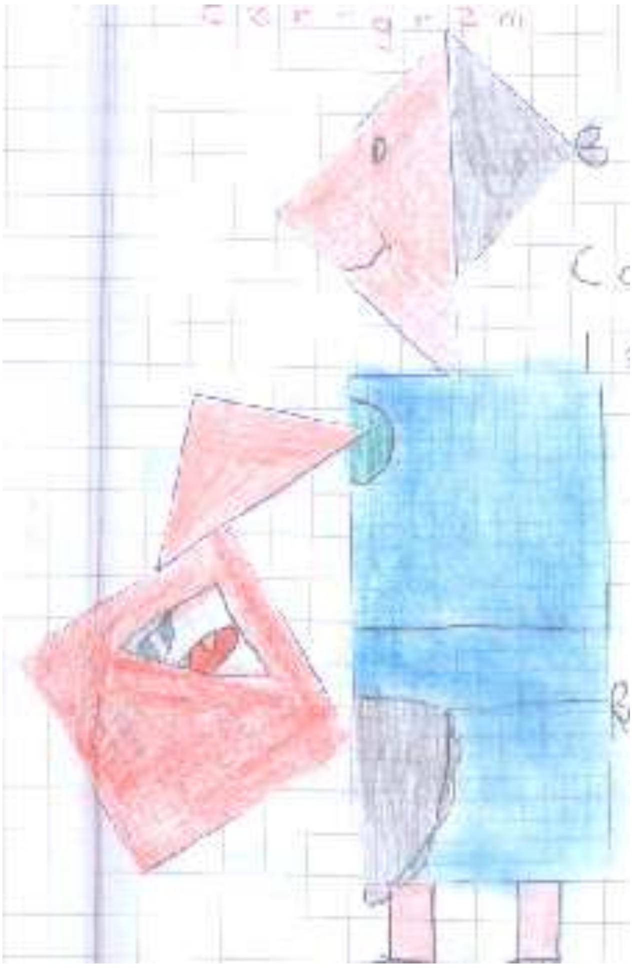
L'insegnante ha consegnato a ciascun bambino un foglio con disegnato il mosaico da ritagliare.
Molti bambini hanno incontrato difficoltà nel ritaglio dei vari pezzi.
Alla fine l'insegnante stessa ha dovuto preparare i pezzi del mosaico già ritagliati e consegnarli a bambini.

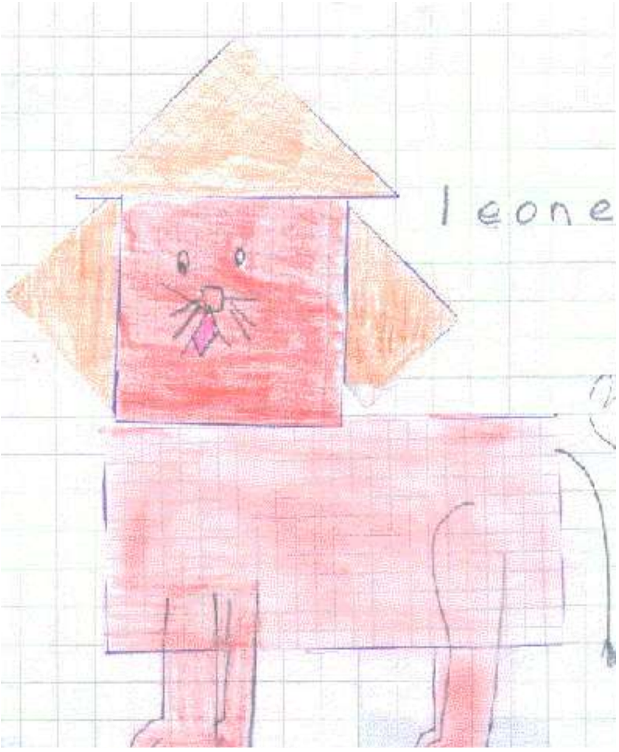
Creatività

I bambini potevano creare liberamente una figura, usando tutti i pezzi del proprio mosaico. Hanno incollato quindi la figura ottenuta sul quaderno e l'hanno poi completata aggiungendo dettagli e colorandola.

Questa attività si è rivelata estremamente affascinante per i bambini, che hanno chiesto spesso di ripeterla.

Ecco l'esempio di due figure create dai bambini: la contadinella e il leone.

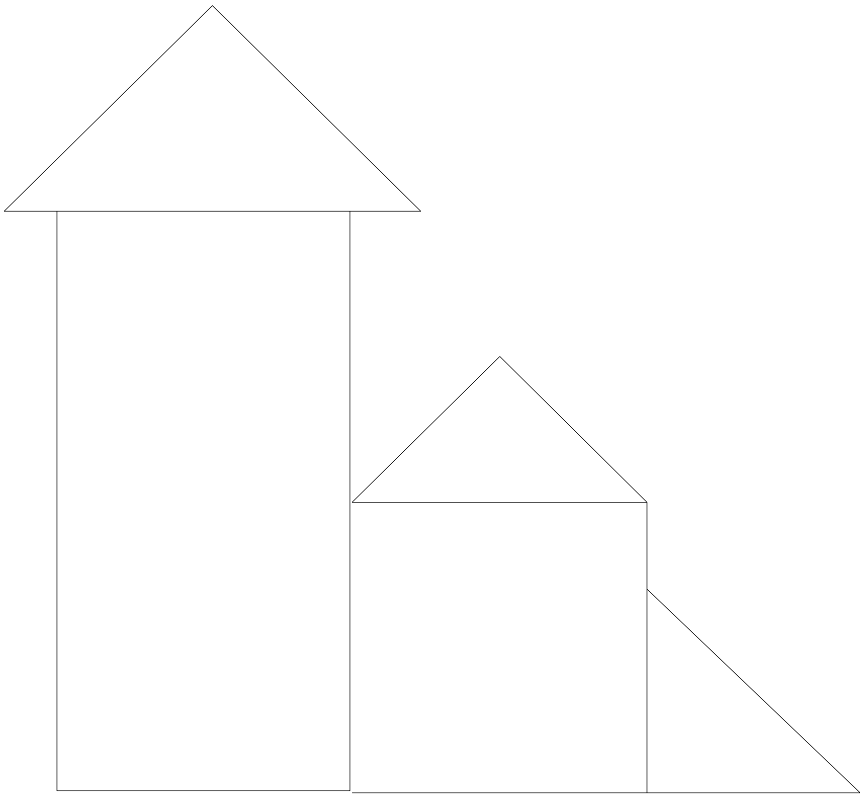




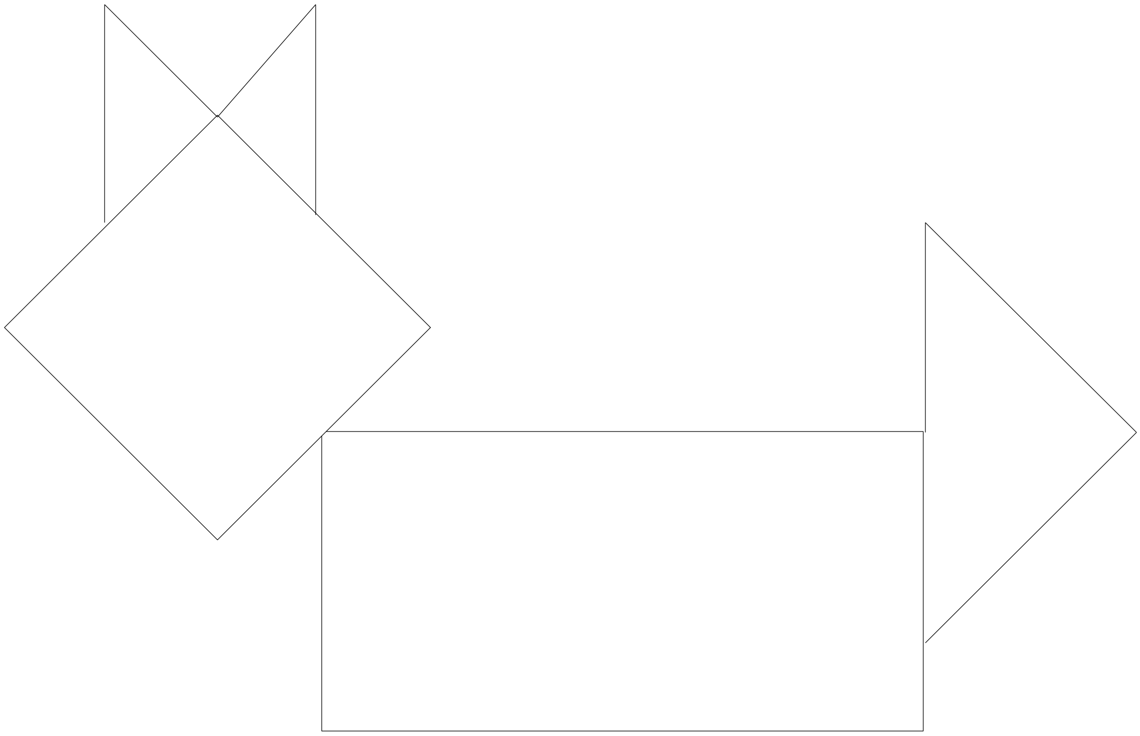
Ricostruzione delle figure

Ai bambini sono state proposte le seguenti figure ricavate dall'articolo di Djament

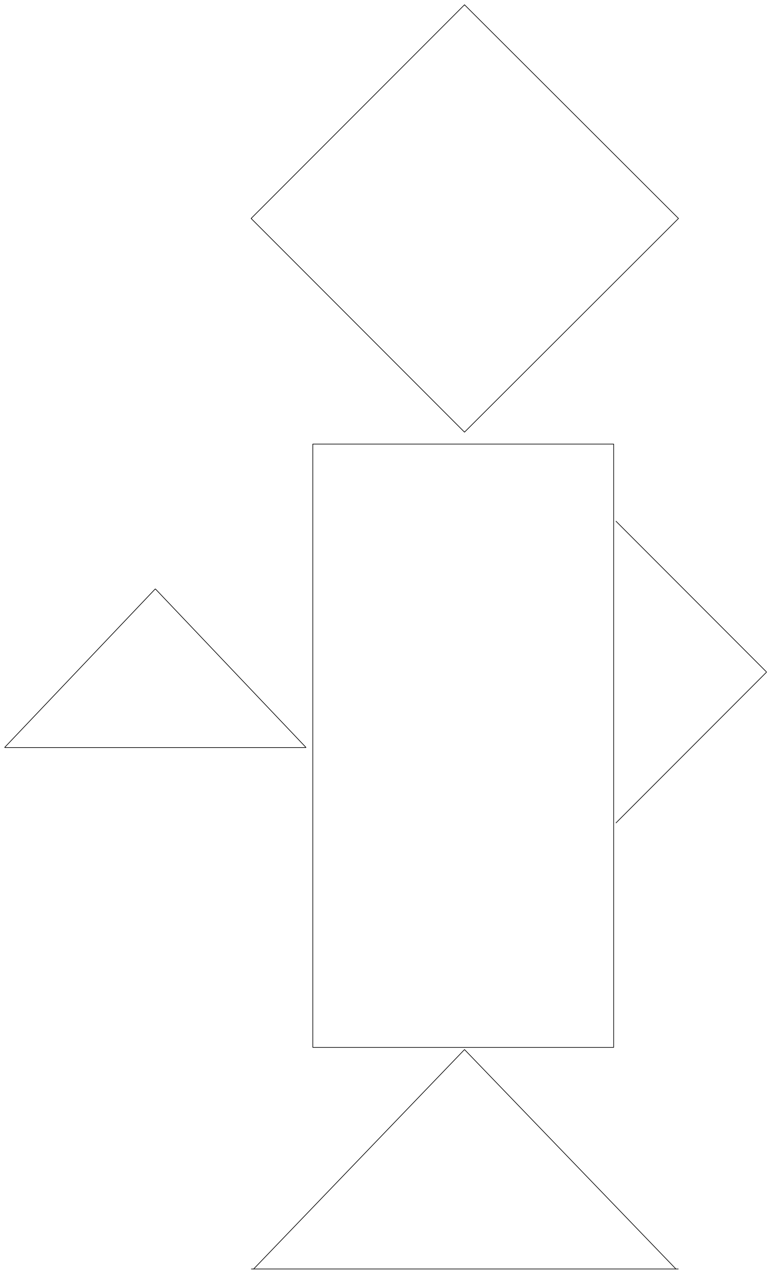
Il castello



Il gatto



Il cameriere



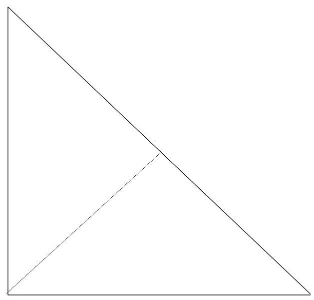
Mantenendo la figura in vista, i bambini dovevano ricostruirla utilizzando tutti pezzi del mosaico.

La ricostruzione ha dato buoni risultati; le difficoltà maggiori sono state riscontrate nel posizionare correttamente i triangoli e in particolare l'angolino basso del castello, le orecchie del gatto, la coda del gatto, le braccia del cameriere.

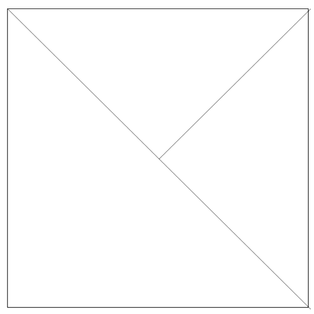
Memorizzazione

Ai bambini sono state proposte le seguenti attività:

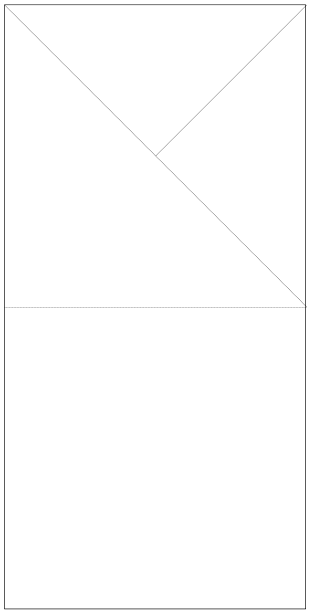
- Ritaglia il triangolo lungo la linea tratteggiata e poi ricostruisci il triangolo iniziale utilizzando i due pezzi ottenuti



- Ritaglia il quadrato lungo la linea tratteggiata lunga e poi ritaglia il triangolo lungo la linea tratteggiata breve. Ricostruisci il quadrato iniziale utilizzando i tre pezzi ottenuti



- Ritaglia la figura lungo la linea centrale; ritaglia uno dei due quadrati lungo la linea tratteggiata più lunga; ritaglia uno dei triangoli ottenuti lungo la linea tratteggiata. Ricostruisci la figura iniziale utilizzando i quattro pezzi ottenuti



La ricostruzione delle figure iniziali ha creato grosse difficoltà, in particolare nel ruotare i triangoli. Alcuni bambini, anche dopo avere ricostruito correttamente la figura, non hanno accettato di identificarla con la figura iniziale messa accanto.

Riconoscimento delle figure

Se da una parte i bambini non hanno avuto difficoltà nell'individuare i tre diversi tipi di figure utilizzate, i triangoli, i rettangoli ed i quadrati, molti di loro hanno invece incontrato difficoltà nell'identificare figure ruotate, soprattutto triangoli, o nel ruotare un triangolo per sovrapporlo ad un altro uguale dato.

Queste osservazioni concordano con la suddivisione dei livelli di pensiero geometrico di van Hiele: la maggior parte dei bambini si trova infatti ancora al livello visivo e quindi giudica le figure nella loro apparenza e non ancora in base alle loro proprietà.

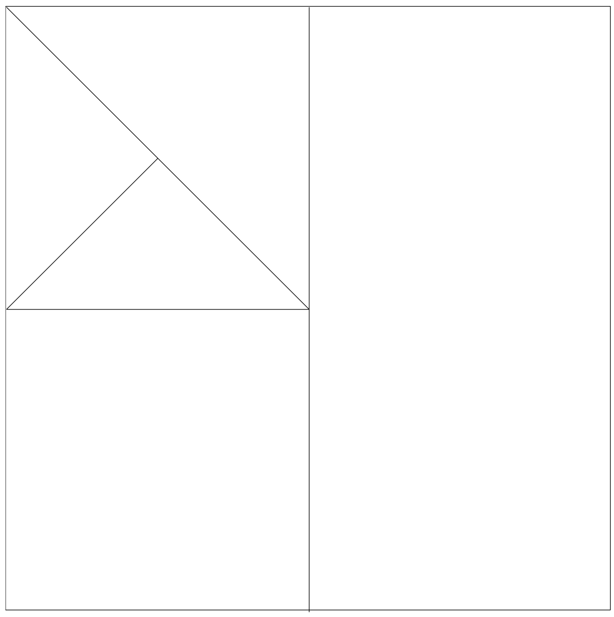
In accordo con Del Grande, i bambini non hanno ancora raggiunto la costanza percettiva, o costanza della forma. Ciò implica il mancato riconoscimento di certe figure geometriche, presentate con una varietà di dimensioni, contesti e posizioni nello spazio.

2. II PROPOSTA DI LAVORO

Confronto tra classi del primo e del secondo ciclo

Le attività esposte nel precedente paragrafo sono state proposte nello stesso ordine e nella stessa modalità in due classi del secondo ciclo (una terza e una quarta) per rilevare le eventuali variazioni.

È stato utilizzato lo stesso mosaico



Le attività svolte sono state le seguenti

- riconoscimento e definizione delle figure
- costruzione
- libera creatività
- memorizzazione
- ricostruzione

Riconoscimento e definizione delle figure

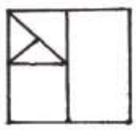
- Tutti i bambini sono stati in grado di riconoscere (classe 1ª) e nominare correttamente le forme (classi 3ª e 4ª)
- Alla richiesta di identificare figure uguali,
    - nella classe prima alcuni bambini non hanno riconosciuto l’uguaglianza a causa della imprecisione del ritaglio;
    - nelle classi del secondo ciclo tutti hanno riconosciuto l’uguaglianza.

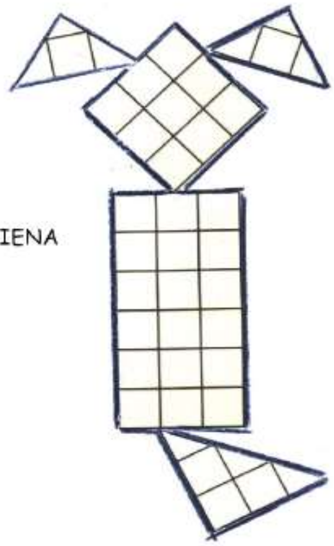
Costruzione

- In molti bambini di prima si sono osservate notevoli difficoltà nel ritagliare le figure
- Negli alunni di terza e quarta si è osservata dapprima una notevole imprecisione nel ritaglio dovuta a sottovalutazione della consegna. Nella proposta successiva si sono invece notate maggiore cura e precisione nel ritaglio.

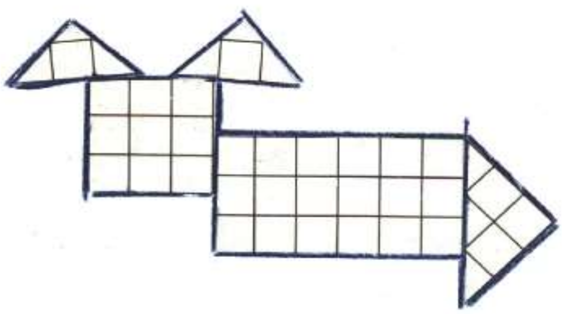
Libera creatività

- Nella classe 1ª la difficoltà maggiore è stata quella di utilizzare tutti i pezzi per un'unica figura:
  - un terzo dei bambini ha sovrapposto i pezzi
  - un bambino ha cercato di modificare i pezzi ritagliandoli
  - tutti i bambini hanno completato le figure con dei particolari disegnati
- In terza elementare si sono riscontrate difficoltà di costruzione in due alunni: i pezzi risultavano troppo grandi e loro non riuscivano a creare un'immagine per loro significativa
- In quarta elementare non si sono evidenziate difficoltà
- La maggior parte dei bambini del secondo ciclo ha definito i disegni con didascalie.





CANE VISTO DI SCHIENA



CANE PELOSO ACCUCCIATO PERCHE' STANCO

Memorizzazione di immagini date

Questa attività è stata svolta solo nella classi terza e quarta.
Le immagini proposte (per esempio: cane, gatto, casa, chiesa, albero…) presentavano la suddivisione interna.

Attività

- Presentazione per cinque secondi di un’immagine scelta
- Ricostruzione d’immagine

Osservazioni

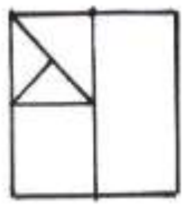
Alcuni bambini hanno ricostruito esattamente la forma, ma utilizzando pezzi differenti rispetto al modello assegnato.
Sono state evidenziate:

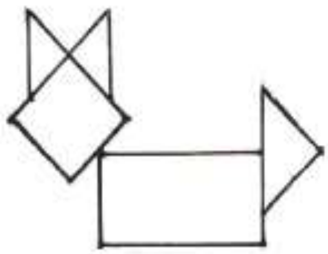
- difficoltà nell’orientamento dei triangoli
- difficoltà nella collocazione di figure che richiedono una rotazione
- difficoltà nella conservazione di grandezze (inversione tra forme piccole e grandi)

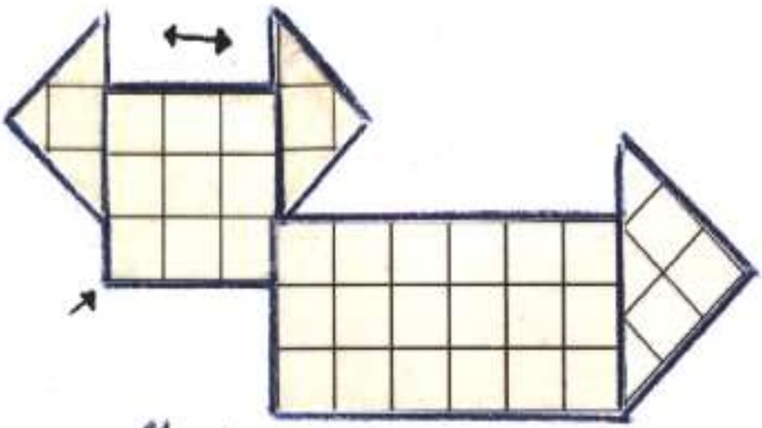
Inoltre dai dati raccolti si è osservato che:

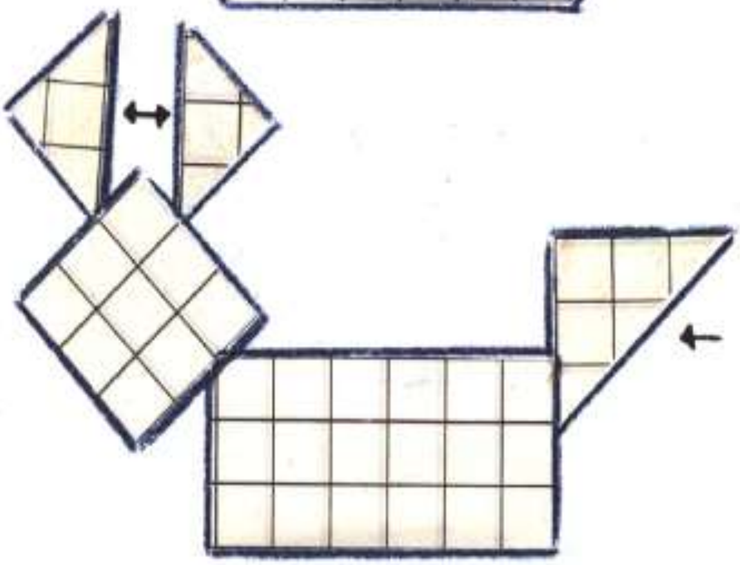
a) l’esattezza di ricostruzione di tutte le proposte è stata raggiunta solo da pochi bambini (1/5 nella terza e 1/4 nella quarta classe);
   alcuni di questi bambini avevano, normalmente, prestazioni appena sufficienti nei vari ambiti disciplinari.
b) le maggiori difficoltà sono state riscontrate in alunni che presentano carenze nella lateralizzazione e disgrafie.

Ecco esempi di errori compiuti dai bambini





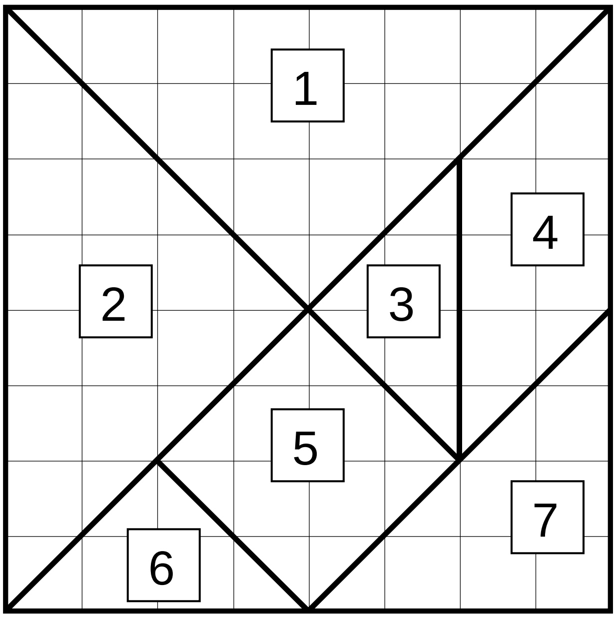




Ricostruzione

L'attività è stata svolta con i seguenti mosaici

- Il mosaico Djamant per la classe prima
- Il tangram cinese tradizionale per le classi terza e quarta

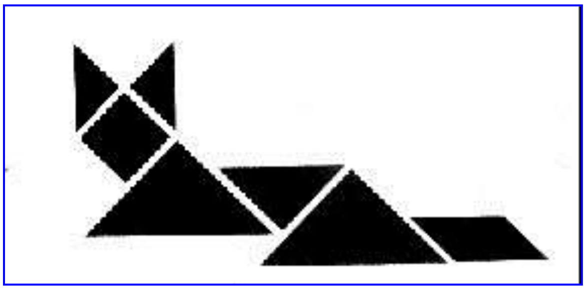


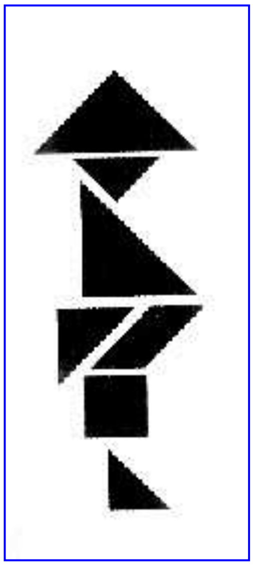
Osservazioni

- Per i bambini della classe prima sono state evidenziate:
  - difficoltà nell'orientamento dei triangoli
  - difficoltà nella collocazione di figure che richiedono rotazione
  - difficoltà nella conservazione di grandezze (scambio tra forme piccole e grandi)

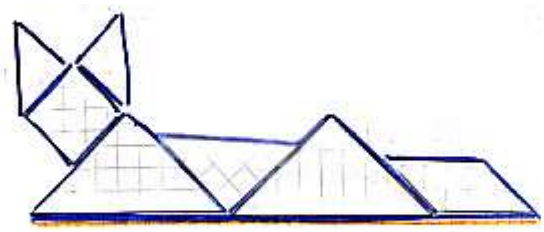
Queste stesse difficoltà si erano evidenziate nella memorizzazione di immagini nelle classi terze e quarte.

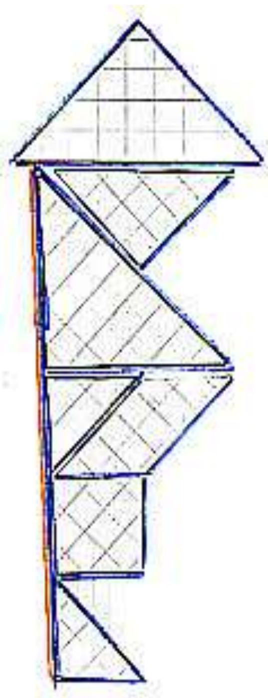
- Tutti i bambini del secondo ciclo sono in grado di riprodurre l’immagine data. Ecco esempi di immagini ricostruite





- Alcuni alunni hanno introdotto un allineamento inesistente nell’originale nel posizionare i pezzi in verticale e/o in orizzontale durante la ricostruzione di alcune figure.





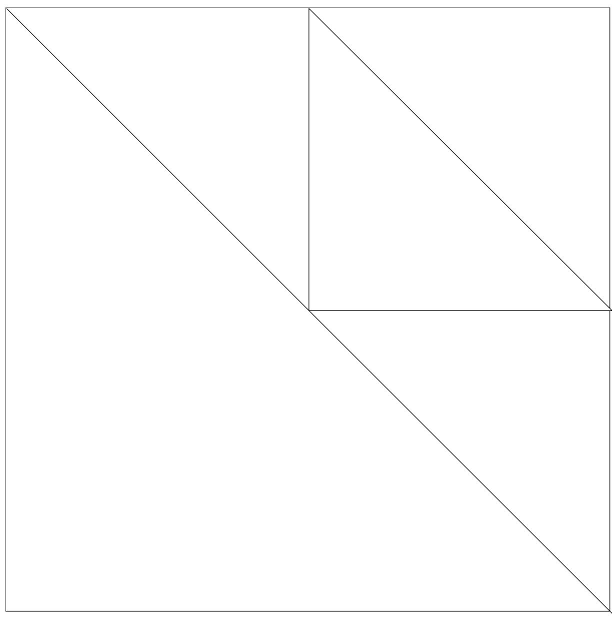
3. III PROPOSTA DI LAVORO

“Giocate con i mosaici”

Le attività qui esposte sono state svolte in una classe quarta ed in una classe quinta, le stesse classi coinvolte il precedente anno nella proposta numero II.

Descrizione

Il mosaico considerato è la seguente estensione del mosaico 1 di Brown Wheatley



Il mosaico è formato da 5 triangoli rettangoli isosceli.

Obiettivi

Sviluppare:

1. il concetto di triangolo
2. la percezione del pezzo nello spazio
3. le relazioni spaziali tra i diversi pezzi
4. la costanza percettiva
5. le abilità grafo-manuali

Costruzione – Libera creatività

Ai bambini è stato chiesto di:

1. osservare il modello proposto;
2. ricercare dei punti di riferimento che facilitino la copiatura del mosaico;
3. disegnare il mosaico su un foglio di carta a quadretti da un centimetro e numerarne i pezzi per facilitare il riconoscimento;
4. incollare l'elaborato su di un foglio di plastica leggera per facilitare la manipolazione e la conservazione;
5. ritagliare il mosaico;
6. ricomporre il mosaico più volte per familiarizzare con lo strumento;
7. analizzare le caratteristiche geometriche dei triangoli che compongono il mosaico (angoli, lati,...);
8. costruire liberamente immagini;
9. tracciare il contorno dell'immagine creata per permetterne la conservazione;
10. scegliere se definire il proprio elaborato con un titolo, una spiegazione o l'aggiunta di particolari;
11. raccogliere ed osservare gli elaborati prodotti dalla classe;
12. ricostruire le immagini create dai compagni in presenza del modello.

Osservazioni

È stato creato uno "spazio mosaico" dove gli alunni possono fare, scambiare, ricostruire mosaici a piacere. Questo si è dimostrato funzionale perché i bambini hanno liberamente giocato, osservato, confrontato, classificato, sperimentato.

Tutte queste attività si sono rivelate fondamentali perché hanno dato origine a una maggiore comprensione ed interiorizzazione delle proprietà delle figure geometriche fino ad allora apprese.

Costruzione – Creazione di Mosaici Nuovi

Attività

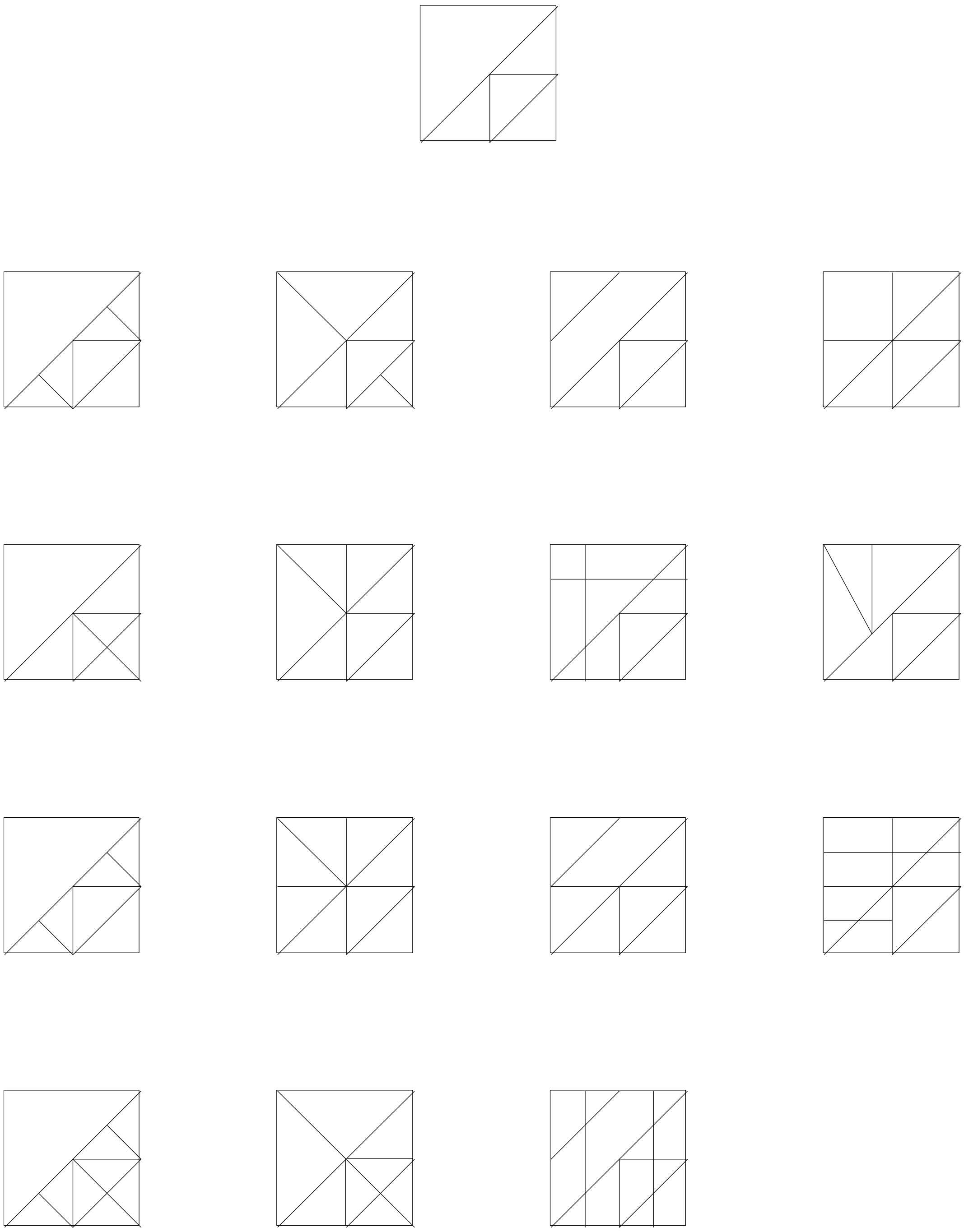
1. Incoraggiare gli alunni ad inventare modifiche da apportare al mosaico dato dall'insegnante
2. Disegnare un mosaico utilizzando griglie diverse (triangolari, esagonali, quadrate)
3. Realizzare il mosaico dato solo con piegature di un foglio quadrato bianco
4. Realizzare con le tecniche dell'origami le figure geometriche che compongono il Tangram cinese tradizionale.

Qui riferiamo soltanto della prima e dell'ultima di tali attività.

1. Variazioni

Variazioni del Mosaico prodotte dagli alunni

Partendo dal primo modello, è stato chiesto ai bambini di crearne variazioni. La figura mostra alcuni elaborati scelti dagli alunni tra i tanti da loro prodotti



Alla fine del lavoro gli alunni stessi hanno osservato che i mosaici divisi in troppi pezzi erano difficili da utilizzare nel successivo momento di creazione.

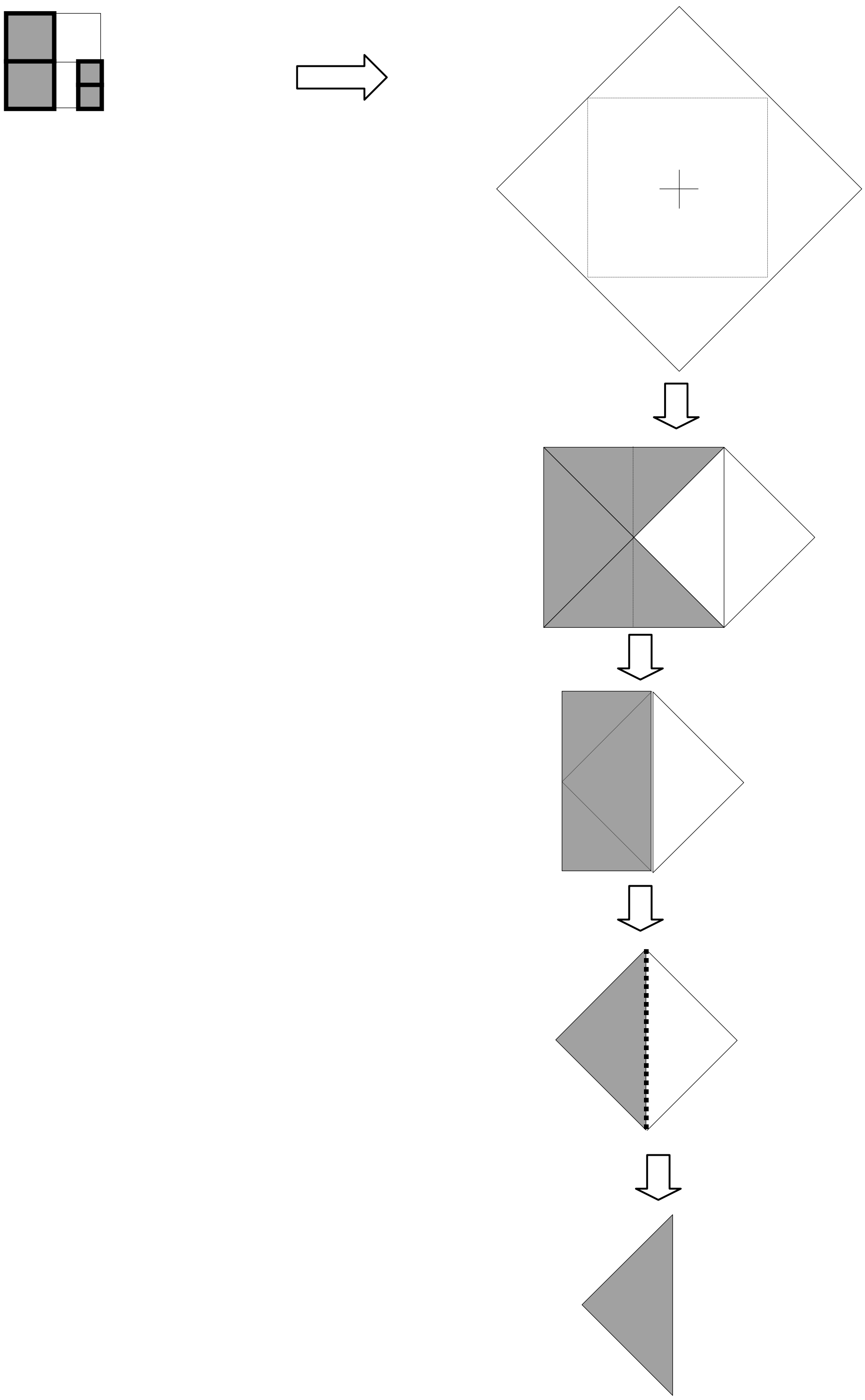
4. Ricostruzione del Tangram

(Raffaele Leonardi)

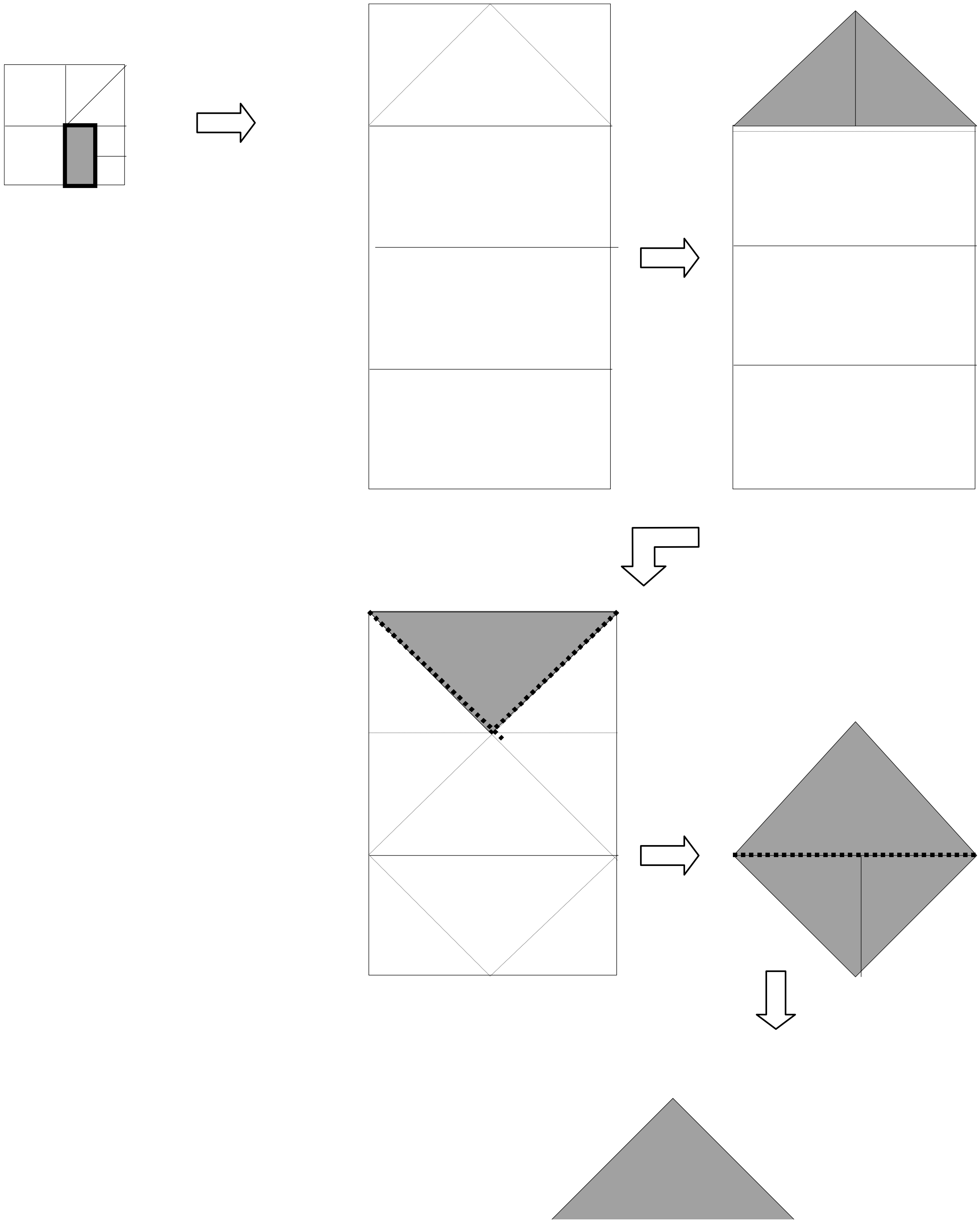
Cerchiamo di ricostruire con le tecniche dell’origami le tessere del tangram cinese tradizionale partendo dal mosaico riprodotto qui sotto.

<u>TRIANGOLI</u> (i 2 grandi e i 2 piccoli)

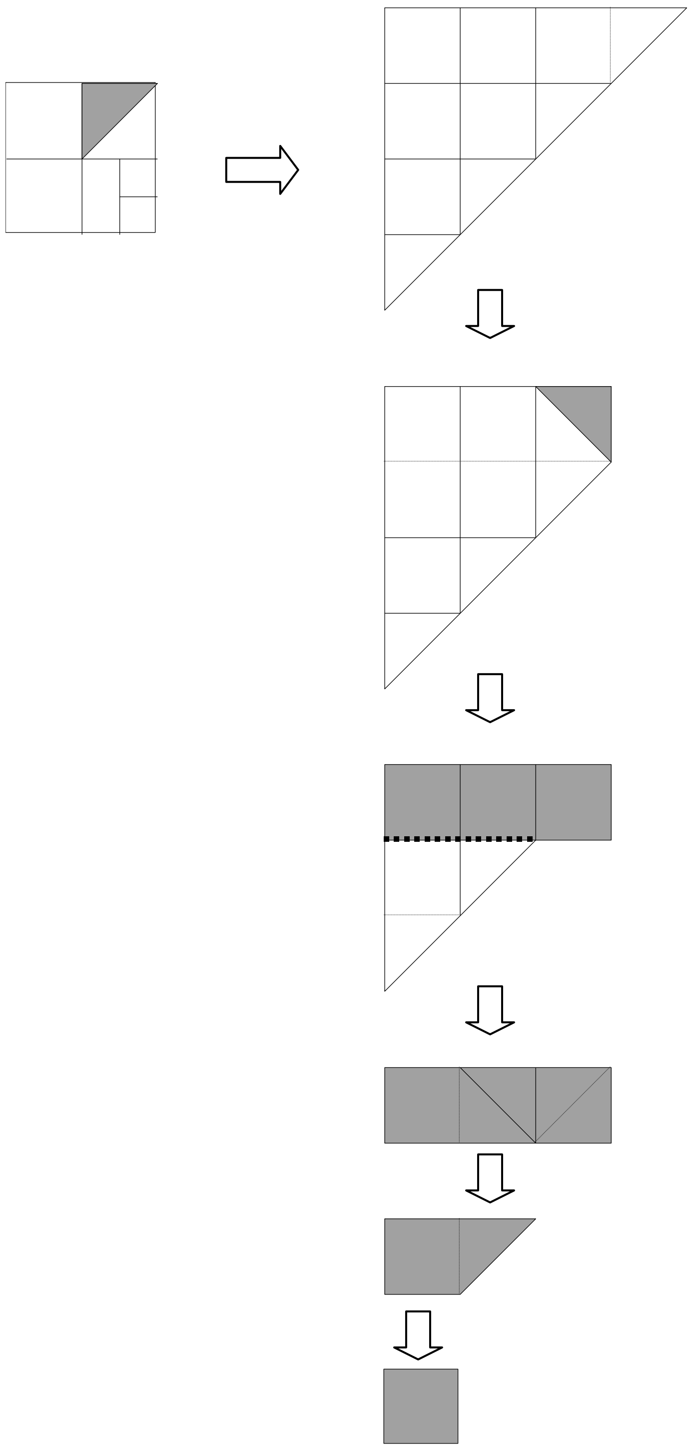
Occorrono quattro fogli quadrati e bisogna piegare lungo le linee tratteggiate.



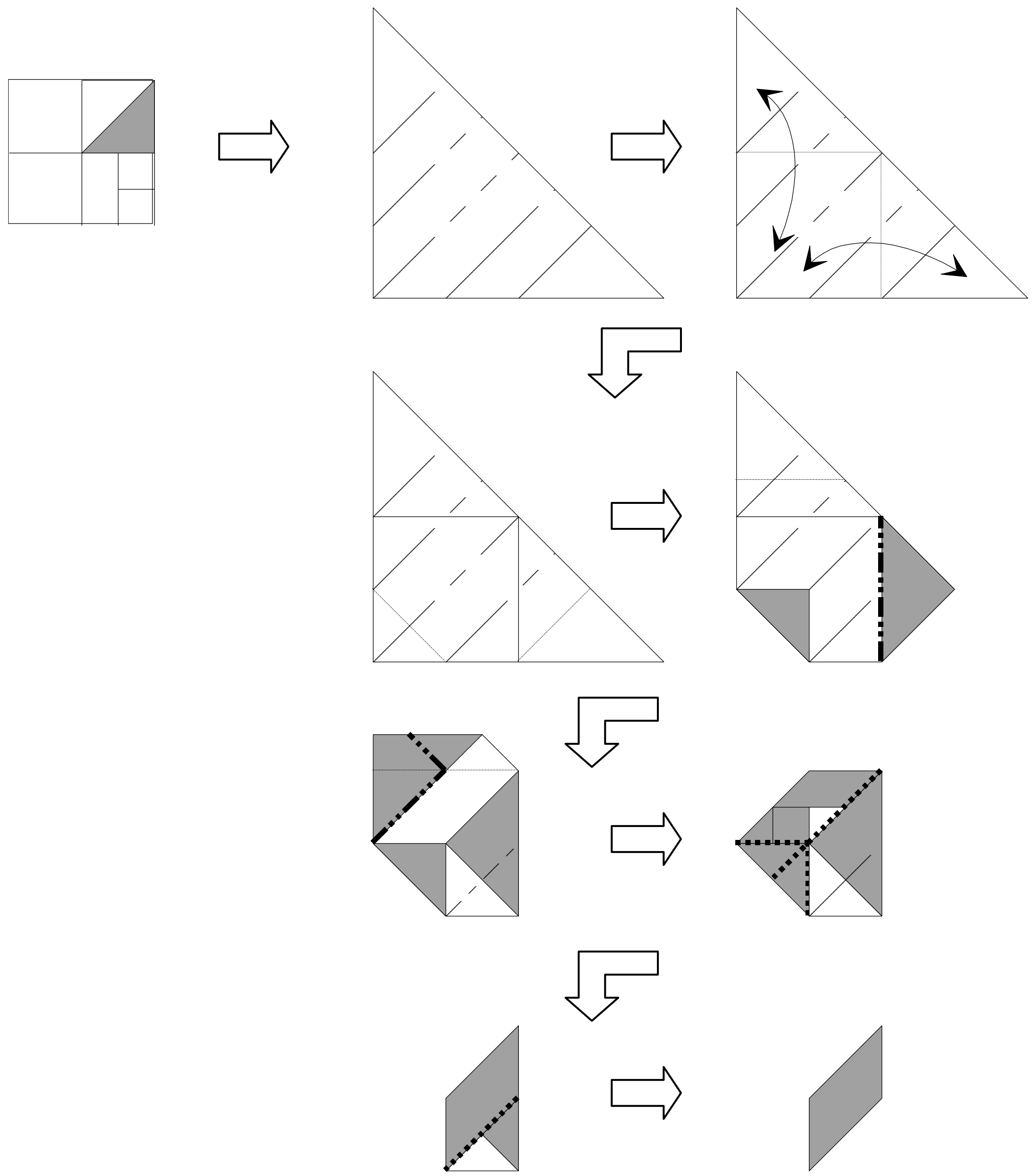
<u>TRIANGOLO</u> medio



QUADRATO



PARALLELOGRAMMA



Dati raccolti

Creazione

Classi	*Totale alunni*	*Masch.*	*Femm.*	*Totale creaz.*	*Media*	*Tema*			*Caratt.*		
						A.	*O.*	*P.*	*AG*	*SS*	*T*
IV	16	9		32	3,4	8	20	4	-	9	23
			7	35	5	18	8	9	2	9	24
V	18	9		36	4	10	22	4	-	10	26
			9	45	5	22	10	13	2	15	28

Legenda:

Tema:

A = Animali

O = Oggetti

P = Persone

Caratt. = caratterizzazione disegno

AG = aggiunte grafiche

SS = spiegazione scritta

T = titolo.

Osservazioni

- Le alunne si sono dimostrate più produttive
- Tema
    - Sia in quarta che in quinta gli alunni maschi preferiscono produrre immagini di oggetti.
    - Le alunne scelgono preferibilmente animali.

- Caratterizzazioni degli elaborati
    - Sia in quarta che in quinta le aggiunte grafiche sono state disegnate da pochissime alunne.
    - La maggioranza predilige caratterizzare l’elaborato solo con il titolo.
    - In quinta si è evidenziato l’uso di un titolo particolarmente descrittivo.

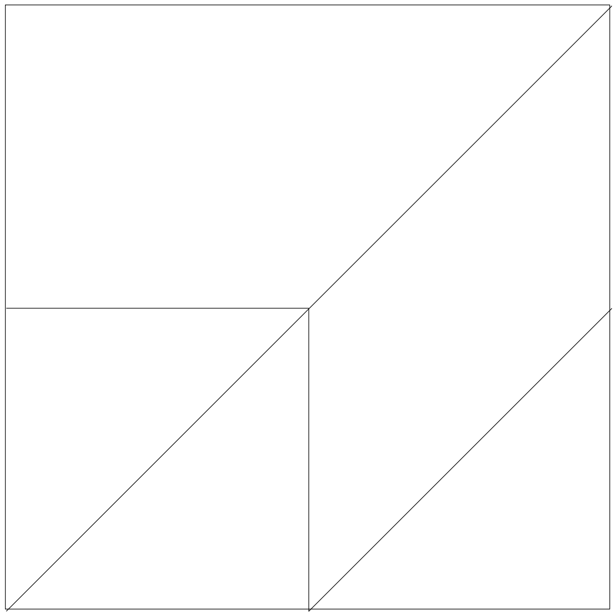
4. IV PROPOSTA DI LAVORO

“Fate attenzione!”

Le attività qui esposte sono state svolte in una classe quarta ed in una classe quinta, le stesse classi coinvolte nelle proposte numero II e numero III.

Descrizione

Il mosaico considerato è un’estensione del mosaico 2 di Brown - Wheatley.
È formato da tre triangoli, un trapezio e un parallelogramma.



Obiettivi

1. Conoscere le proprietà geometriche delle figure di base che compongono il mosaico
2. Acquisire competenza terminologica geometrica
3. Utilizzare un linguaggio preciso e funzionale al compito richiesto
4. Prestare attenzione alle modalità comunicative
5. Prestare attenzione alle diverse variabili presenti nella richiesta di lavoro
6. Allenare la concentrazione, l’attenzione e la memorizzazione
7. Strutturare strategie personali di memorizzazione
8. Stimolare la riflessione sulle procedure messe in atto

Riproduzione

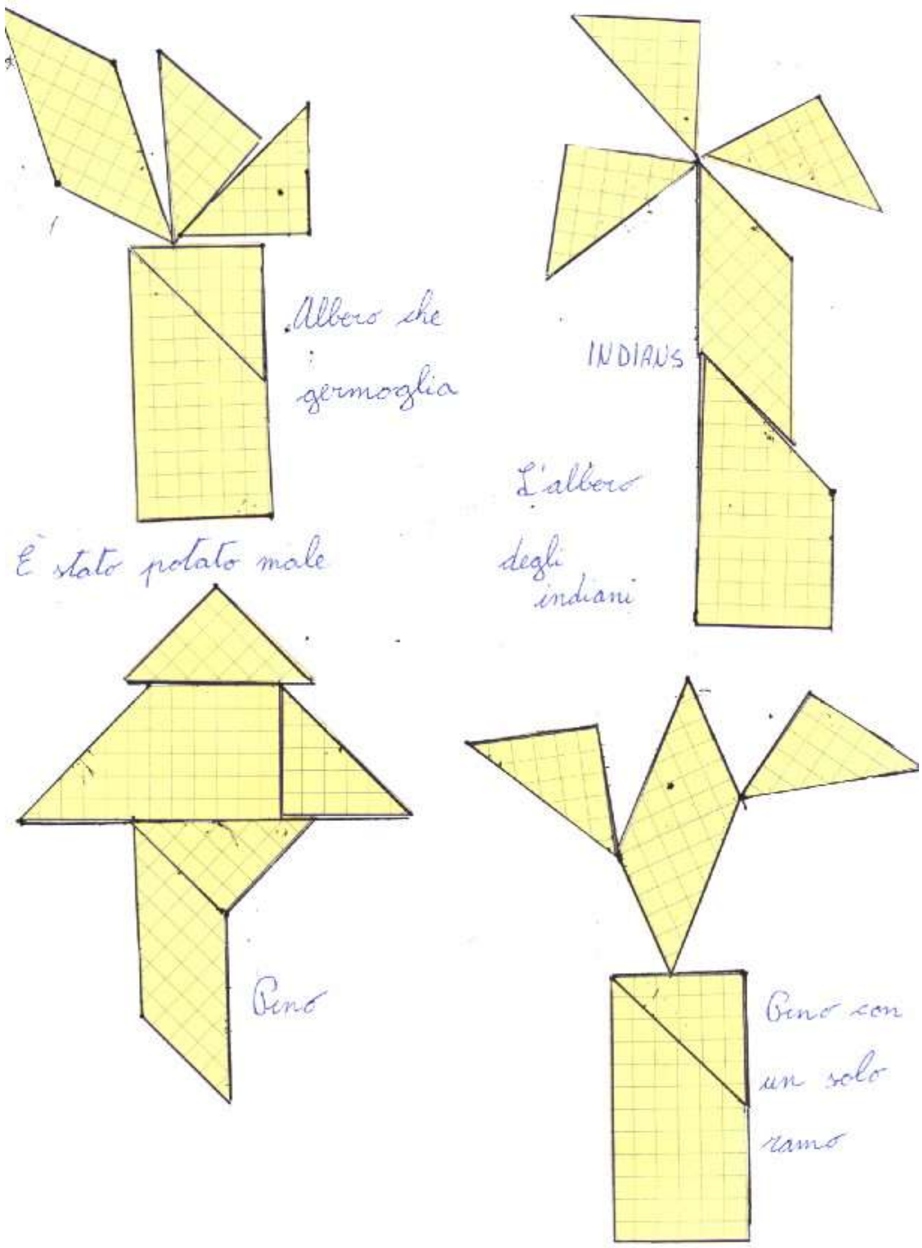
1. Riprodurre il mosaico esclusivamente con piegature in presenza di un modello
2. Seguire per imitazione le indicazioni date dall'insegnante
3. Seguire solo le indicazioni verbali dell'insegnante e/o compagno
4. Riprodurre un modello dato individuando da soli le strategie per ottenerlo
5. Ordinare la procedura di piegatura con un numero o una lettera

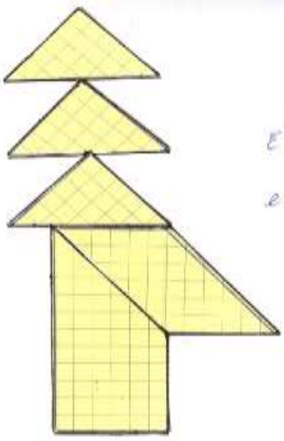
Creazione – Memorizzazione

1) Osservare per un determinato numero di secondi (3 - 5 secondi) e memorizzare una figura in cui sono evidenti le tessere che la compongono
2) Ricostruire la figura mostrata, che rappresenta un mosaico costruito in precedenza dall'alunno e ricalcarne il profilo
3) Verificare la correttezza della propria rappresentazione mediante il confronto con l'immagine guida
4) Apportare le correzioni necessarie
5) Riflettere sulla tipologia d'errore
6) Riflettere sui procedimenti adottati, sulle modalità seguite, sulle difficoltà incontrate. Proporre domande stimolo come:
    a) Per ricavare la figura su che cosa hai focalizzato l'attenzione?
    b) Hai guardato prima i contorni, hai cercato di ricordare i pezzi e la loro disposizione?
    c) Hai memorizzato l'immagine guardando dall'alto in basso; da sinistra a destra?
    d) Hai memorizzato le figure grandi o quelle piccole?
    e) E' stato più semplice ricordare la forma o la loro posizione?
    f) ……………….
7) Stimolare la ricerca di un proprio stile di memorizzazione che risulti funzionale all'attività richiesta

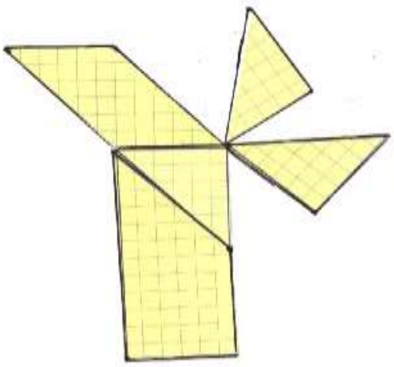
Estensione

1. Proporre per la memorizzazione:
   - nuovi disegni proposti dagli alunni
   - immagini ombra (senza divisione interna)
2. Chiedere di scoprire se l'immagine ombra data è realizzabile posizionando i diversi pezzi
3. Chiedere di dettare ai compagni l'immagine creata da ognuno
4. Analizzare
   - in che momento del lavoro decidono di assegnare il titolo alla loro creazione (prima, durante, dopo)
   - cosa influenza il titolo

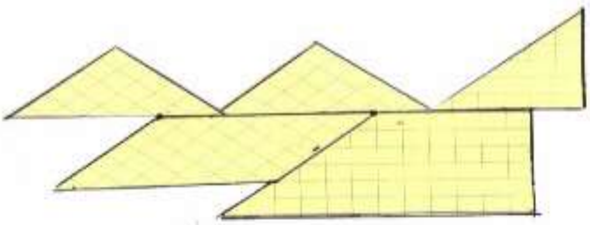


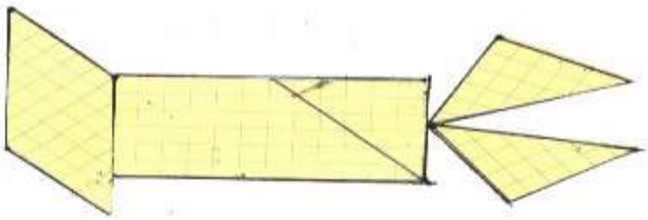


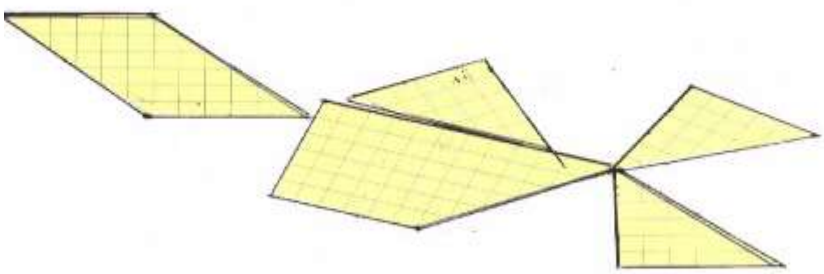
È un pino con un ramo
e si chiama Peppino



Albero potato







Dati raccolti

Titolo (quando gli alunni decidono di assegnare il titolo al loro lavoro)

Classi	*Totale alunni*	*Maschi*	*Femm.*	*Prima*	*Durante*	*Dopo*
IV	16	9		2	2	5
			7	2	1	4
V	18	9		3	2	4
			9	3	3	3

<u>Osservazioni</u>

- Prima ⇒ alunni con capacità di progettazione
- Durante ⇒ alunni dotati di intuizione
- Dopo ⇒ gli alunni cercano un titolo per il lavoro fatto; se non lo trovano modificano i pezzi

Titolo Libero o assegnato

Classi	*Totale alunni*	*Maschi*	*Femm.*	*Libero*				*Assegnato*			
				F	*D*	*di*	*N*	*F*	*D*	*di*	*N*
IV	16	9		7	2	8	1	2	7	1	8
			8	8		8			8	2	6
V	18	9		9		8	1		9		9
			9	9		9		1	8	3	6

Legenda: Titolo libero = scelto dagli alunni
Titolo assegnato = dato dall'insegnante
F = facile
D = difficile
di = divertente
N = noioso

Osservazioni

Gli alunni hanno evidenziato come l'assegnazione del titolo rendesse il lavoro più difficile e più noioso.

Osservazioni sulla dettatura di un'immagine creata tratte dalla conversazione con i bambini

(Estensione n°2)

Considerazioni di chi detta (cl. IV)

- “È difficile, bisogna essere precisi, ma non sai mai cosa dire.”
- “Per essere più precisa continuavo a dire cose, ma forse ho complicato di più.”
- “È complicato perché bisogna stare molti attenti a dire poche cose e ricordarsi sempre tutto quello che si è detto per non ripetere o cambiare.”
- “È difficile dare i punti di riferimento all'inizio chiari, perché se no dici una cosa ma loro ne fanno un'altra.”
- “Se si usano i termini geometrici è un po' più facile, ma non basta.”
- “Bisogna pensare bene quasi tutto prima di iniziare.”

Considerazioni di chi esegue (cl. V)

- “Dettava un po' veloce.”
- “Non capivo a quali angoli si riferiva, mi sono accorta che dovevo studiarli meglio.”
- “Non capivo come bisognava sistemare le figure anche se la compagna era sufficientemente chiara.”
- “Se ascoltavo un'informazione perdevo l'altra.”
- “Non ricordavo il significato della parola adiacente.”
- “Non spiegava bene le figure.”
- “Non usava termini geometrici adeguati.”
- “Per chiarire confondeva ancora di più, perché non sceglieva le parole giuste.”

Le osservazioni degli alunni evidenziano il seguente punto fondamentale: dettare ed eseguire richiedono competenze diverse.

Per chi detta è importante:

1. pensare a ciò che si deve dire e schematizzarlo;
2. avere un linguaggio tecnico condiviso dalla classe;
3. fornire punti di riferimento chiari;

4. formulare frasi brevi;
5. ripetere le informazioni mantenendo sempre la stessa procedura e terminologia;
6. dettare con voce chiara e tono sostenuto;
7. lasciare tempi di attesa tra una indicazione e l'altra.

Per chi ascolta è invece importante:

1. cogliere i punti di riferimento
2. prestare attenzione ad ogni singola indicazione
3. eseguire subito l'istruzione data, senza aspettare la successiva.

Strategie di memorizzazione

Gli alunni si sono confrontati sulle strategie di memorizzazione usate. Questo momento di riflessione è stato molto utile a quei bambini che o hanno incontrato difficoltà, oppure non sono riusciti a trovare strategie risolutive per portare a termine il compito. Per alcuni di loro è stata fondamentale l'esplicitazione da parte dei compagni delle loro procedure, perché ciò ha permesso loro di individuare determinati processi di memorizzazione e di farli propri.

Memorizzo per primo…

"… il pezzo grande perché:

- dà la forma
- è il più evidente
- è più facile sistemare i pezzi piccoli."

"… la parte centrale"

"… il contorno per capire cos'è"

"… dipende dalla forma"

"… i pezzi più piccoli perché:

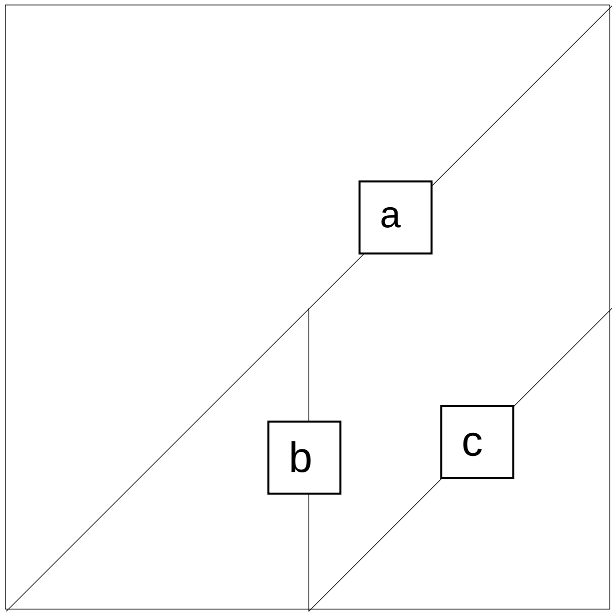
- sono i più difficili da sistemare
- di solito sporgono di più
- sono più difficili da vedere."

5. V PROPOSTA DI LAVORO

"Costruite mosaici"

Questa attività è stata svolta in una classe quarta ed in una classe quinta.

È stato utilizzato il secondo mosaico di Brown – Whearhley.



Costruzione

Origami - Piegature

Il bambino ha a disposizione più fogli quadrettati di forma quadrata.

L'insegnante propone di

- riprodurre un mosaico mediante piegature
- contrassegnare ogni piegatura con una lettera, che deve essere uguale per tutti

Egli precisa che il risultato è corretto quando compaiono nettamente solo le piegature necessarie.

L'attività è stata graduata in questo modo:

- nella classe quarta gli alunni hanno operato su fogli quadrettati con la guida verbale dell'insegnante e il supporto del modello da riprodurre;
- nella classe quinta gli alunni hanno operato facendo riferimento solo al modello.

Al termine di ogni lavoro, l'insegnante ha invitato gli alunni a riflettere e a rispondere alla domanda: "In quale ordine hai eseguito le piegature? Indicale. Perché hai scelto questo ordine?"

Nella classe quinta sono state proposte queste domande:

"A quale tentativo sei riuscito a piegare esattamente? Indicalo"

1° TENTATIVO

2° TENTATIVO

3° TENTATIVO….

"Come è stato per te questo lavoro?"

☐ facile

☐ di media difficoltà

☐ difficile

Risposte

I risultati sono stati i seguenti (il numero degli alunni della classe quinta è 17):

Ordine delle piegature

a c b	5 alunni
a b c	12 alunni

Osservazioni

Tutti gli alunni hanno effettuato la prima piegatura in "a".

Gli alunni che hanno scelto l'ordine "a b c" hanno detto che era più facile ottenere prima la piegatura in "b", piegando il quadrato lungo l'asse di simmetria verticale fino ad incontrare la piegatura "a", esattamente a metà (quindi hanno trovato così il centro del quadrato); poi, ripiegando all'interno il vertice (in basso a destra) verso il centro del quadrato, hanno ottenuto la piegatura in "c".

Gli alunni che hanno scelto l'ordine "a c b" hanno operato contando i quadretti per trovare il centro del quadrato.

Tentativi

1° tentativo	4 alunni
2° tentativo	11 alunni
3° tentativo	2 alunni

Grado di difficoltà

Facile	5 alunni
Di media difficoltà	10 alunni
Difficile	2 alunni

Osservazioni

In generale gli alunni hanno espresso il grado di difficoltà coerentemente con il numero di tentativi effettuati:

- I quattro alunni che hanno detto che il lavoro è stato "facile" sono quelli che sono riusciti al primo tentativo. Solo un alunno ha detto che è stato "facile" anche se è riuscito al 2° tentativo, motivando che ha voluto rifare il lavoro poiché le piegature erano "un po' storte e non ben definite".
- I dieci alunni che hanno detto che il lavoro è stato "di media difficoltà" sono quelli che sono riusciti al 2° tentativo.
- I due alunni che hanno detto che il lavoro è stato "difficile" sono quelli che sono riusciti al 3° tentativo.

Costruzione

Costruzione di mosaici su griglie

Questa attività è stata svolta in una classe quinta.

Gli alunni lavorano su griglie predisposte (di triangoli equilateri e di quadrati).

L'insegnante propone di:

- costruire sulla griglia un mosaico, indicando il numero massimo di pezzi;
- numerare i pezzi del mosaico e definire la loro forma;
- rilevare, dopo aver definito un'unità di misura, anche diversa da quelle standard (ad es. il triangolino più piccolo della griglia a triangoli):
  - la superficie di ogni pezzo,
  - le figure uguali,
  - le figure equivalenti;
- individuare se ci sono figure simili;
- ritagliare i pezzi del mosaico;
- con i pezzi ottenuti creare un'immagine a piacere;
- riprodurre il contorno della figura sul quaderno.

Esempio di consegne per l'alunno

"Lavoro con il mosaico da me costruito

1. Indico da quanti "triangolini" (unità di misura: tri) è formato ogni pezzo
2. indico se ci sono pezzi equivalenti
3. indico se ci sono pezzi uguali."

In riferimento al mosaico "L" le risposte sono le seguenti:

n. 1 = 7,5 tri

n. 2 =7,5 tri

Sono uguali, quindi equivalenti

n. 3 = 9 tri

n. 4 = 11 tri

n. 5 = 21 tri

n. 6 = 9 tri

Sono equivalenti

n. 7 = 12 tri

Esempi di mosaici e di figure costruiti dagli alunni

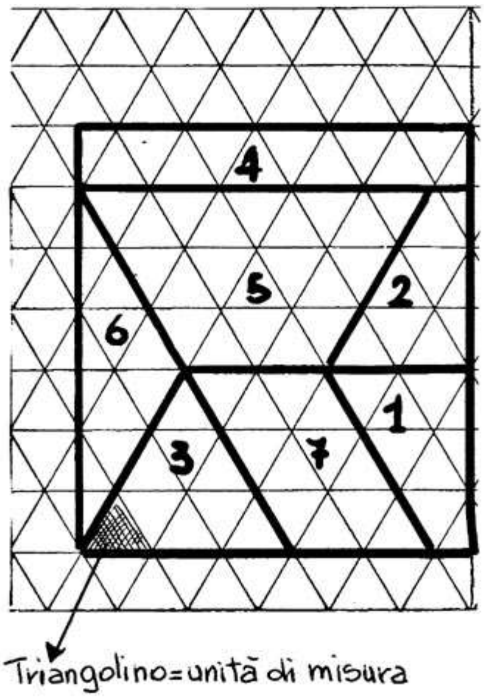


fig."L"

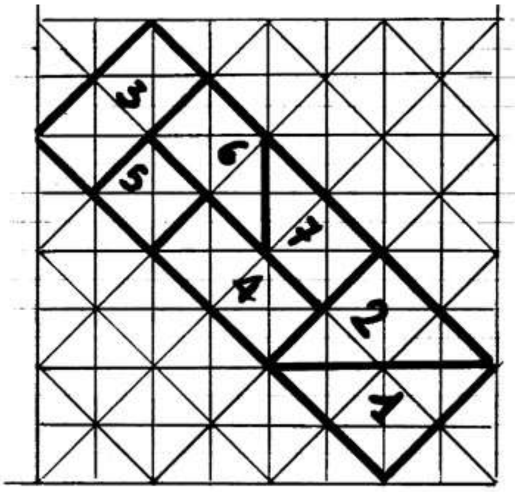


fig."M"

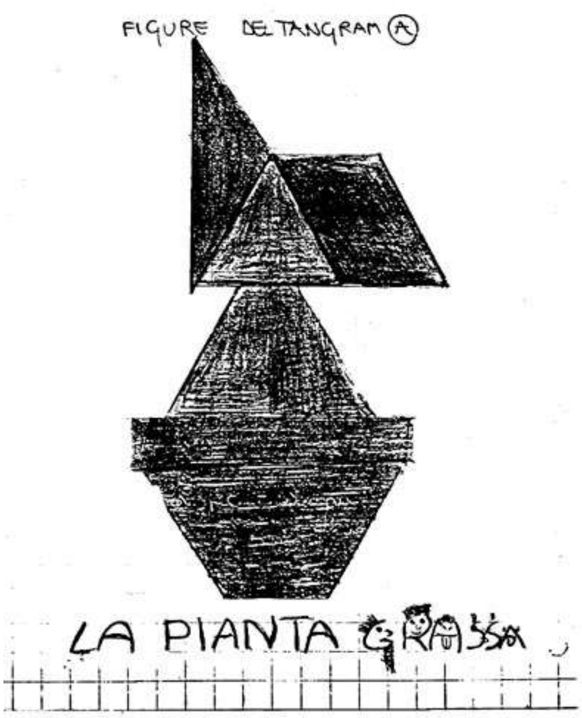
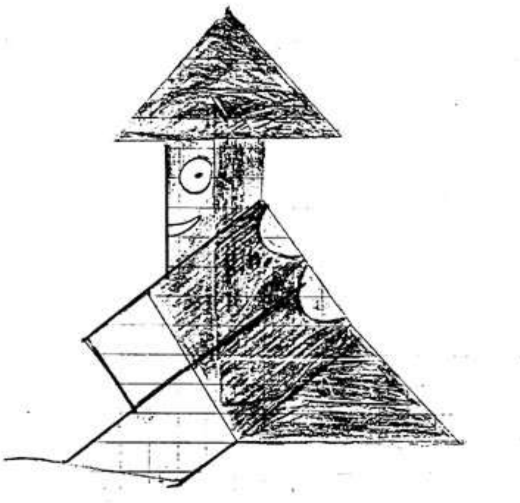


fig."L1"



IL BRUCO CHE ESCE DA TERRA

fig."M1"

Ricostruzione

Figure ombra

L'attività è stata svolta in una classe quarta ed in una classe quinta

Si sono evidenziati due livelli:

1. Gli alunni devono scoprire da quali pezzi è costituita una figura, di cui è tracciato solo il contorno (figure C – D – E – F), provando a sovrapporre le tessere del mosaico alla sagoma disegnata (la sagoma proposta deve essere realizzata con i pezzi delle stesse dimensioni di quelle del mosaico in dotazione agli alunni).

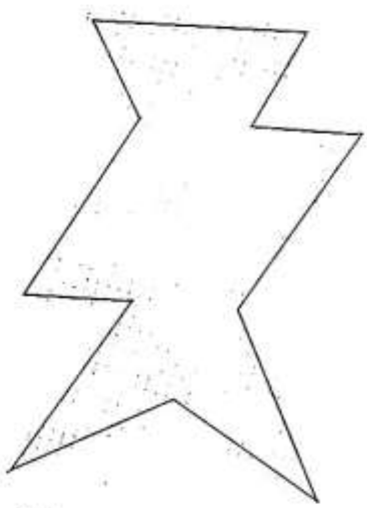
   Una volta che hanno individuato i pezzi, ne disegnano il contorno all'interno del perimetro. Ogni alunno ha una propria sagoma su cui lavorare.
2. L'insegnante espone solo una sagoma di cui è tracciato solo il contorno. Gli alunni, osservando la sagoma, devono ricostruirne la figura, scoprendo da quali pezzi è costituita.

Risultati

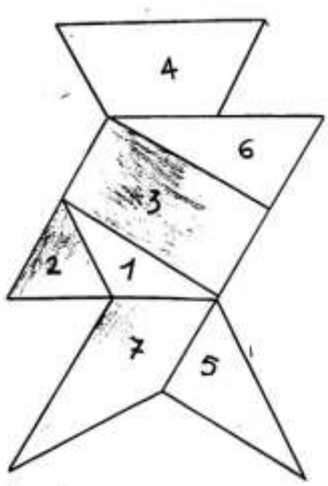
- Il primo livello è risultato facile per tutti gli alunni di entrambe le classi.
- Il secondo livello è risultato difficile: solo 9 alunni su 45 sono riusciti a ricostruire la figura, impiegando dai 10 ai 15 minuti.

L'insegnante, al termine del lavoro ha proposto di confrontare le soluzioni trovate (ad es. FIGURE C1 e C2).

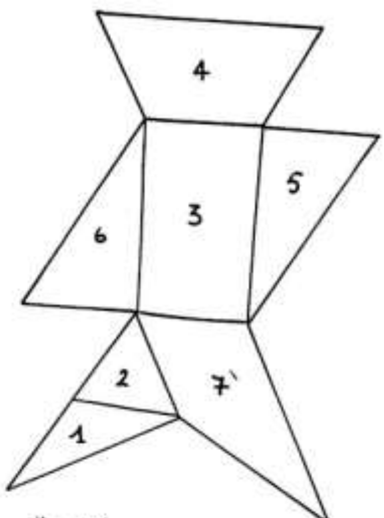
Gli alunni hanno scoperto la possibilità di realizzare la stessa figura, disponendo diversamente i pezzi.



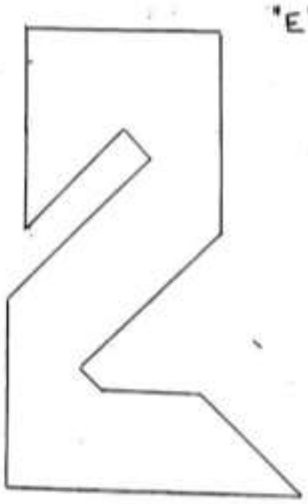
"C"



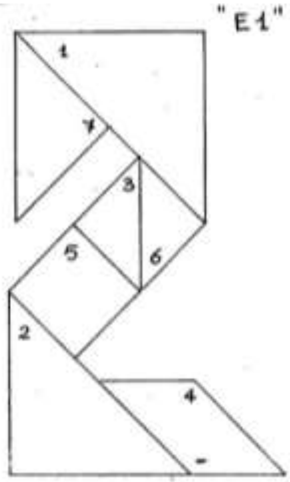
"C1"



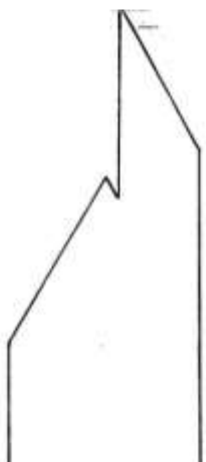
"C2"



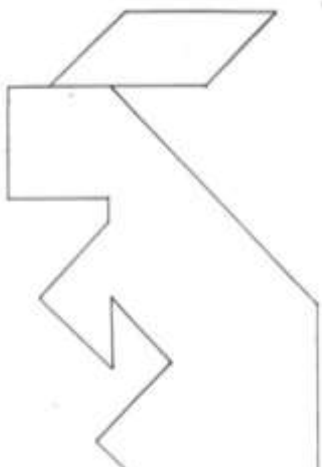
"E"



"E1"



"D"



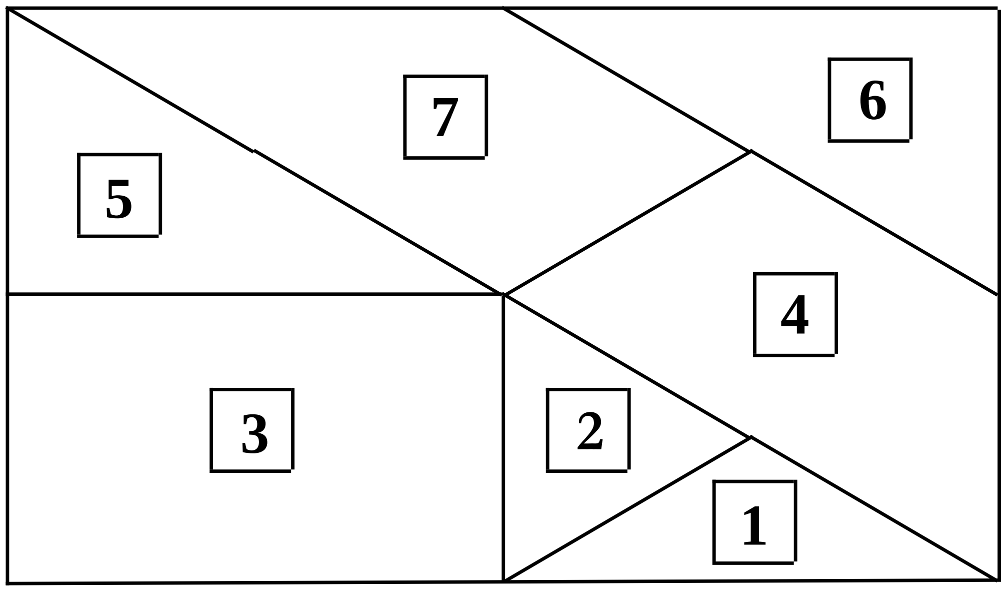
"F"

Memorizzazione

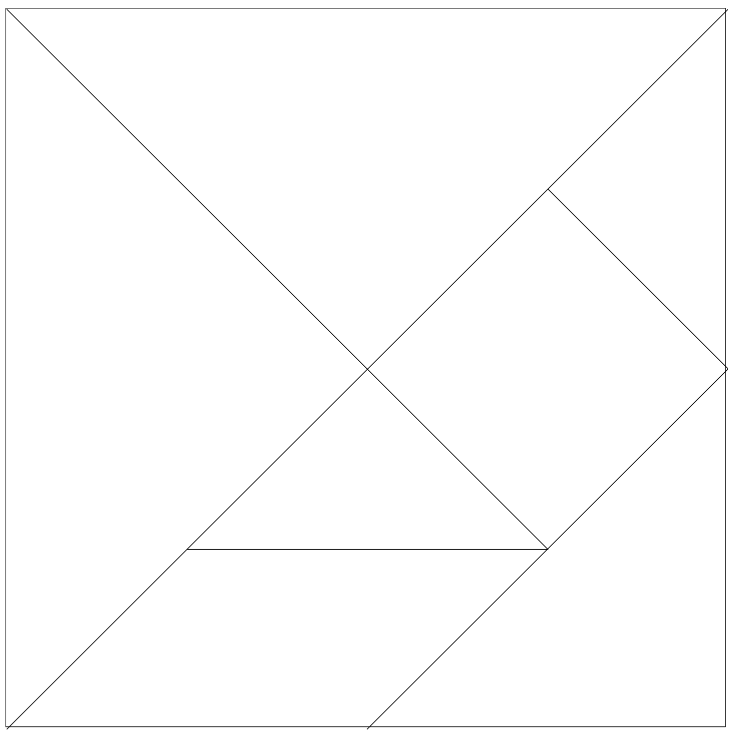
Mostra – Nascondi

L’attività è sta proposta in una classe quarta ed in una classe quinta.

Il mosaico utilizzato nella classe quarta è stato quello di van Hiele.



Nella classe quinta è stato utilizzato il tradizionale tangram cinese



L’insegnante propone di:

- Osservare per un determinato numero di secondi una figura, costruita con i pezzi del mosaico in uso nella classe, in cui sono evidenti le tessere che la compongono.
  Il tempo in cui si mostra la figura può variare da 3 a 5 secondi in base alla complessità del disegno, alla quantità e alla posizione dei pezzi che formano la figura.
- Ricostruire la figura mostrata con i pezzi del mosaico e quindi rappresentarla col disegno.
- Verificare, mediante il confronto con “l’immagine guida”, la correttezza della propria rappresentazione ed eventualmente apportare le correzioni necessarie (oppure rifare il disegno).
- Riflettere sui procedimenti adottati, sulle modalità seguite, sulle difficoltà incontrate, ponendo alcune domande. Ad es.:
    - Per ricordare la figura su che cosa hai focalizzato la tua attenzione? Hai guardato prima i contorni, oppure hai cercato di ricordare i pezzi e la loro disposizione?

Figure proposte agli alunni

Mostra – Nascondi

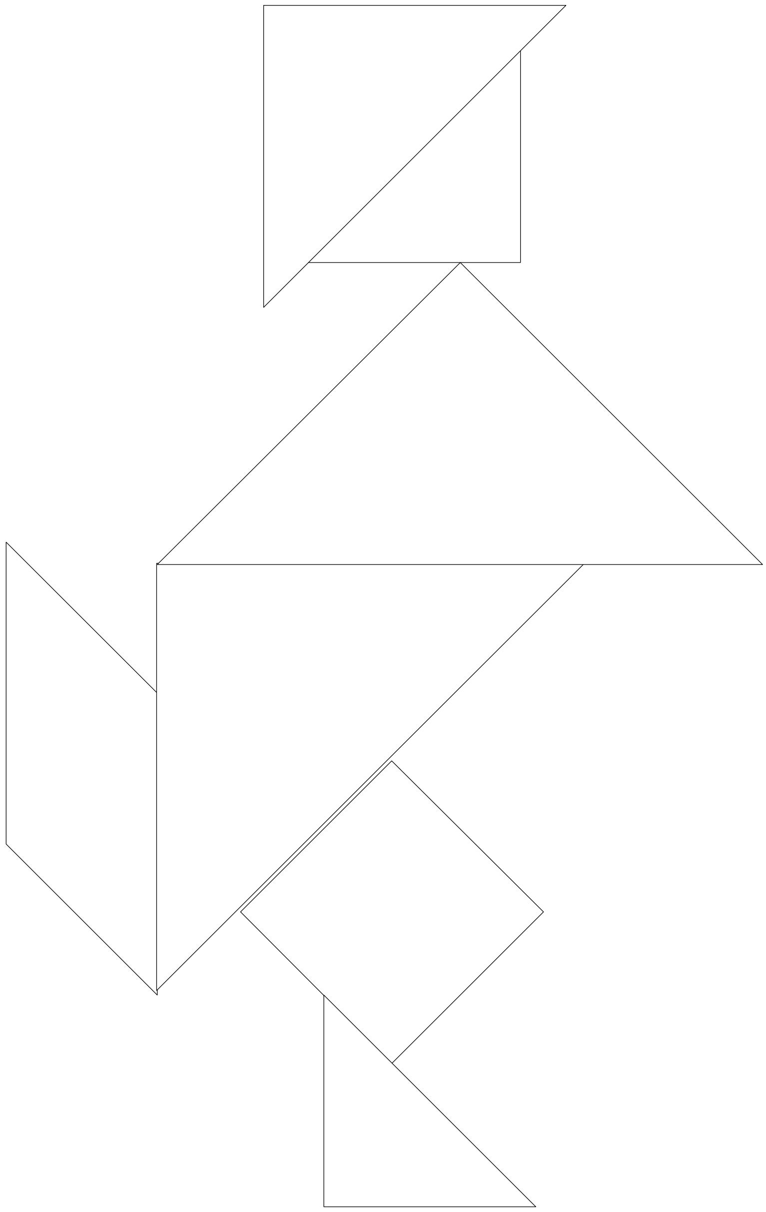


figura “A”

Tangram cinese

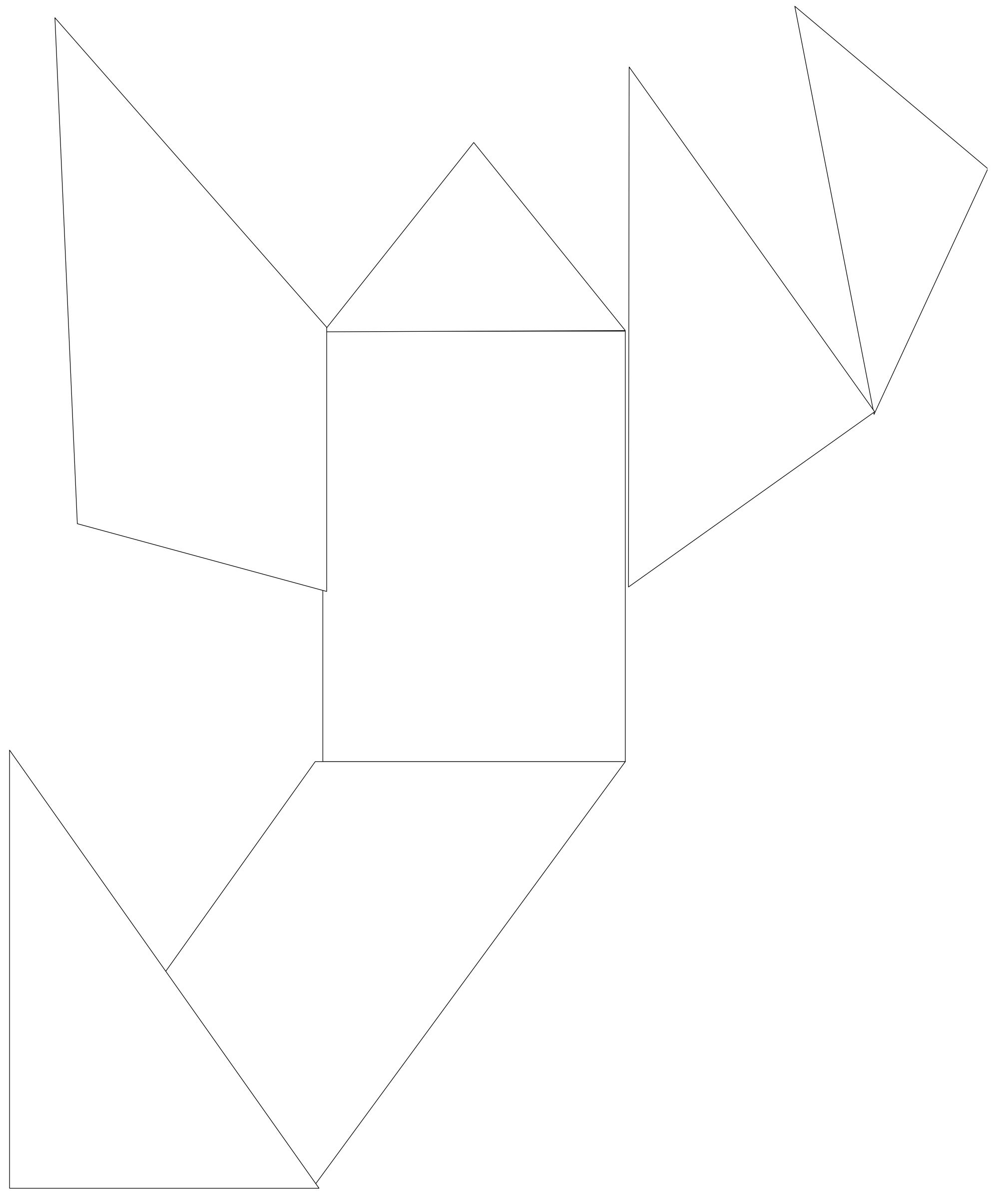


figura “B”

Tangram di Van Hiele

Nella classe quarta è stata utilizzata la figura “B”, nella classe quinta la figura “A”

Risultati

- Nella classe quarta la figura “B” è stata mostrata per 5 secondi.

  Solo 3 bambini su 24 hanno ricostruito esattamente la figura.

  Tutti i bambini hanno impostato esattamente la testa ed il tronco.

  Metà dei bambini ha ribaltato il triangolo della coda.

  Le difficoltà maggiori hanno riguardato gli altri pezzi.

  Al termine dell’attività la figura è stata esposta per il controllo e la correzione. Nonostante la figura esposta, 5 alunni non sono riusciti a ricostruirla esattamente.

- Nella classe quinta è stata proposta, per la memorizzazione, la figura “A”

  Dopo la prima presentazione di 5 secondi nessun alunno ha saputo ricostruire la figura.

  Dopo la seconda presentazione di altri 5 secondi, 2 alunni hanno ricostruito esattamente la figura.

  Dopo la terza presentazione di altri 5 secondi, nessun altro alunno è riuscito a ricostruire esattamente la figura.

- Le difficoltà incontrate dagli alunni portano alla considerazione che è necessario graduare le proposte, partendo da mosaici più semplici, affinché gli alunni sviluppino strategie di memorizzazione dell’immagine.

6. VI PROPOSTA DI LAVORO

i puzzle mosaici

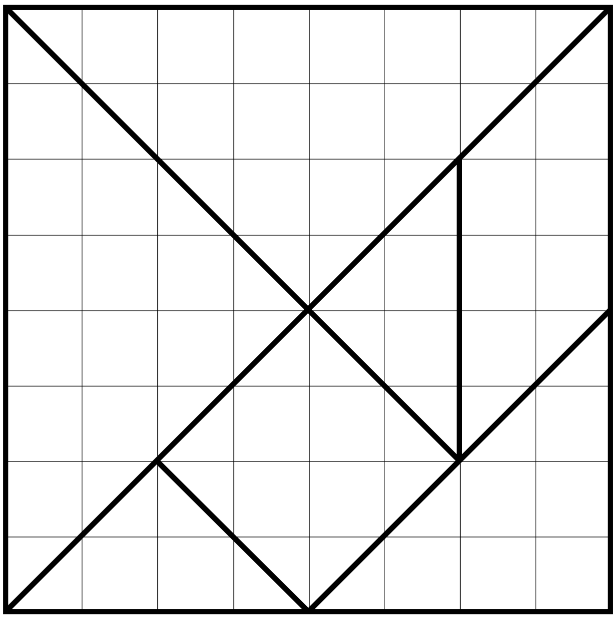
Traccia di lavoro per la classe quinta

"il miglioramento delle abilità spaziali e l'apprendimento della GEOMETRIA sono interdipendenti; allora, come una reazione a catena, il miglioramento delle une porta ad un miglioramento delle altre"

Il Tangram Cinese

Queste attività sono state proposte in una classe quinta.

Il mosaico utilizzato è il tradizionale tangram cinese



Attività

- ❋ Riconoscimento di figure uguali, simili, equiestese.
- ❋ Approfondimento del concetto di area
- ❋ Studio dei movimenti delle figure sul piano

Abilità

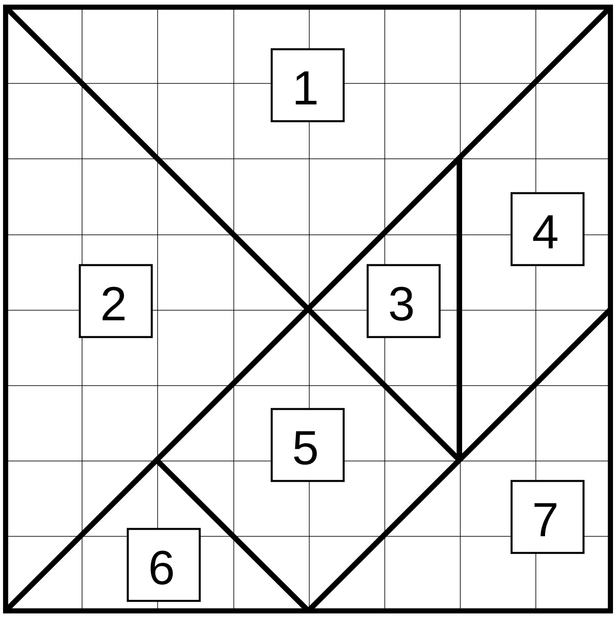
Potenziamento di abilità:

- ❋ di disegno (con uso di strumenti idonei)
- ❋ di misurazione
- ❋ di uso del linguaggio specifico
- ❋ di problem-solving

Costruzione del tangram

Il “TANGRAM” è un antico puzzle – mosaico cinese formato da 7 pezzi.
Lo si può costruire mediante piegature, partendo da un foglio di carta rettangolare, per esempio seguendo il procedimento illustrato in “ Costruire ed Esplorare il Tangram” di A. Dunkels.

Questo tangram è costruito su una griglia di quadrati:



È formato da:

- due triangoli grandi (1 e 2)
- un parallelogramma (4)
- un triangolo medio (7)
- un quadrato (5)
- due triangoli piccoli (3 e 6)

Tutti i pezzi vengono riprodotti su cartoncino e numerati per costruire set duraturi da poter manipolare agevolmente e per riconoscere i pezzi durante le istruzioni e le discussioni.

Creazione

Si avvia una prima fase di “gioco libero”; l’insegnante pone la domanda: “Che cosa si può fare con questi pezzi?”

Il bambino usa l’immaginazione, gioca e crea quello che vuole (oggetti e figure reali, o immaginarie, o astratte), e a ciò che ha creato può dare un nome/titolo e/o aggiungere “particolari”.

Dapprima lo fa solo spostando i pezzi sul piano, poi li rappresenta sul quaderno col disegno, secondo modalità diverse:

- appoggia il pezzo sul foglio e ne segue il contorno con la matita
- appoggia il pezzo sul foglio, segna i vertici con un punto e infine collega i punti col righello

Ecco alcune immagini create dai bambini durante le attività di gioco libero

FIG.1 – “il forziere”
con i pezzi n° 3-4-5-6

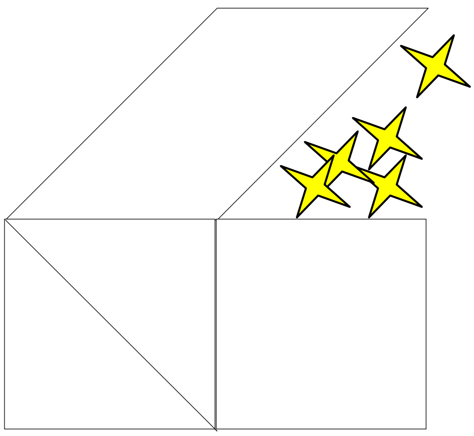


FIG.2 – “tenda da campeggio”

con i pezzi n° 4-7

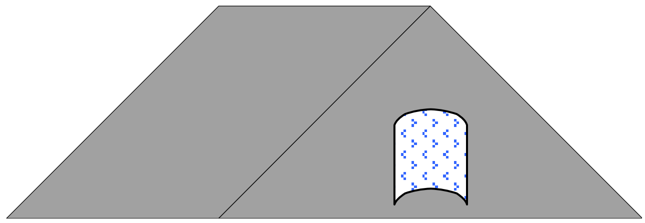


FIG.3 – “ape”

con i pezzi n°1-3-5-3-6-6

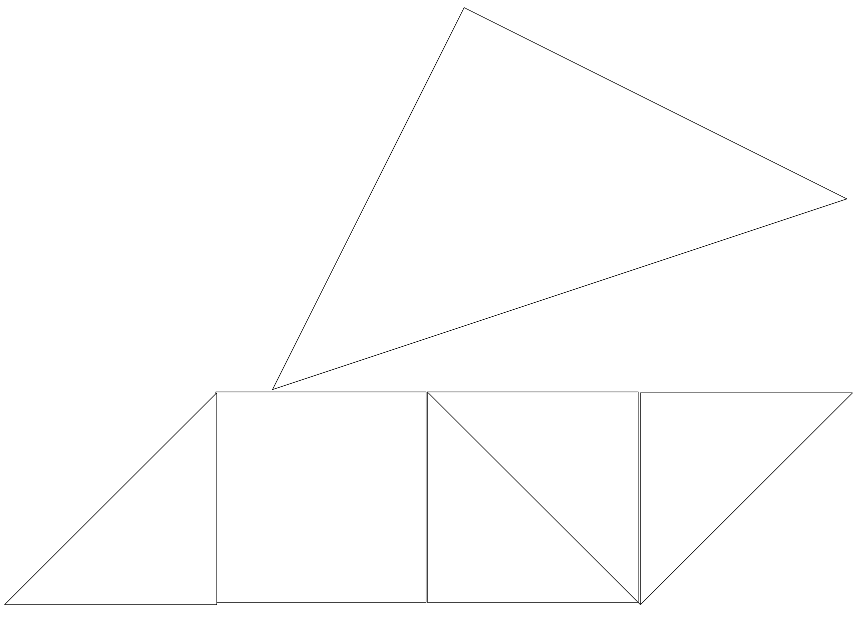
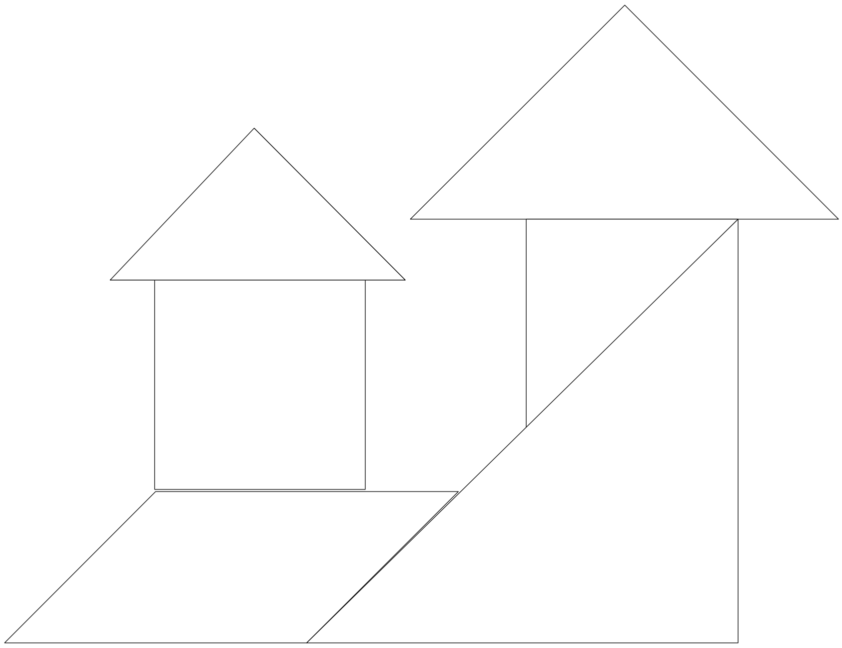


FIG.4 “il castello”

con i pezzi n° 2-3-4-5-6-7



In un secondo tempo si avvia una fase di “gioco guidato”: l’insegnante fornisce un “titolo” (meglio indicare solo la categoria, per non limitare troppo la creatività e le scelte del bambino) e chiede quindi di costruire una figura adeguata, con tutti i pezzi del tangram o solo con alcuni di essi, che verranno chiaramente indicati. Ad esempio:

“forma un animale, un tipo di edificio, una pianta,…:

- con i pezzi n° 2 – 3 – 4 – 5 – 6, presi ciascuno una sola volta (nel puzzle è compreso un solo quadrato – il pezzo 5 – e quindi puoi usare solo un quadrato, mentre di triangoli piccoli ne sono compresi due – il 3 e il 6 - e quindi puoi usare due triangoli piccoli). Risulterà una figura composta da 5 pezzi.
- con tutti i 7 pezzi del tangram, presi ciascuno una sola volta.
- lavorando in coppia con un tuo compagno: hai quindi a disposizione i pezzi di due tangram, che puoi usare come preferisci”

Nelle pagine seguenti riproduciamo alcune immagini formate dai bambini durante queste attività di gioco guidato

FIG.5 – “gatto che dorme”
con i pezzi n° 2-3-4-5-6

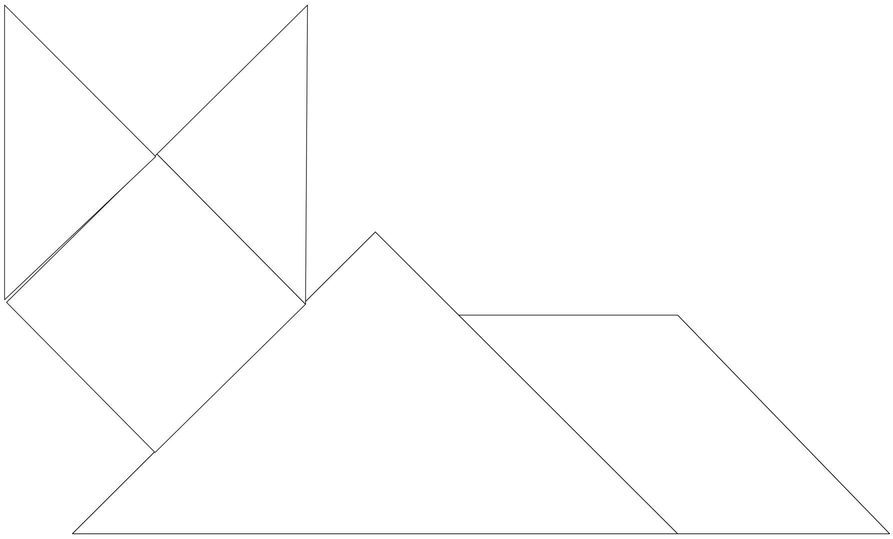


FIG.6 – “il gallo”
con i tutti i 7 pezzi

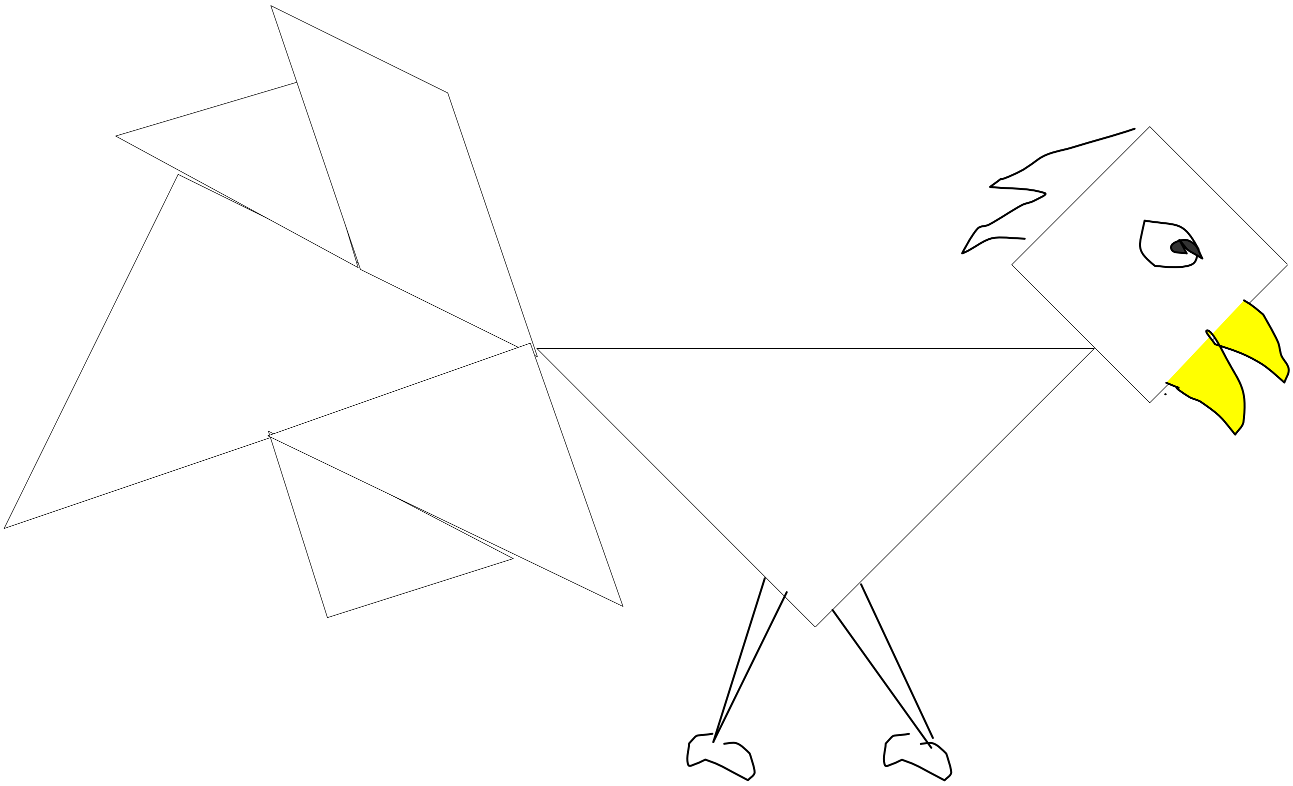
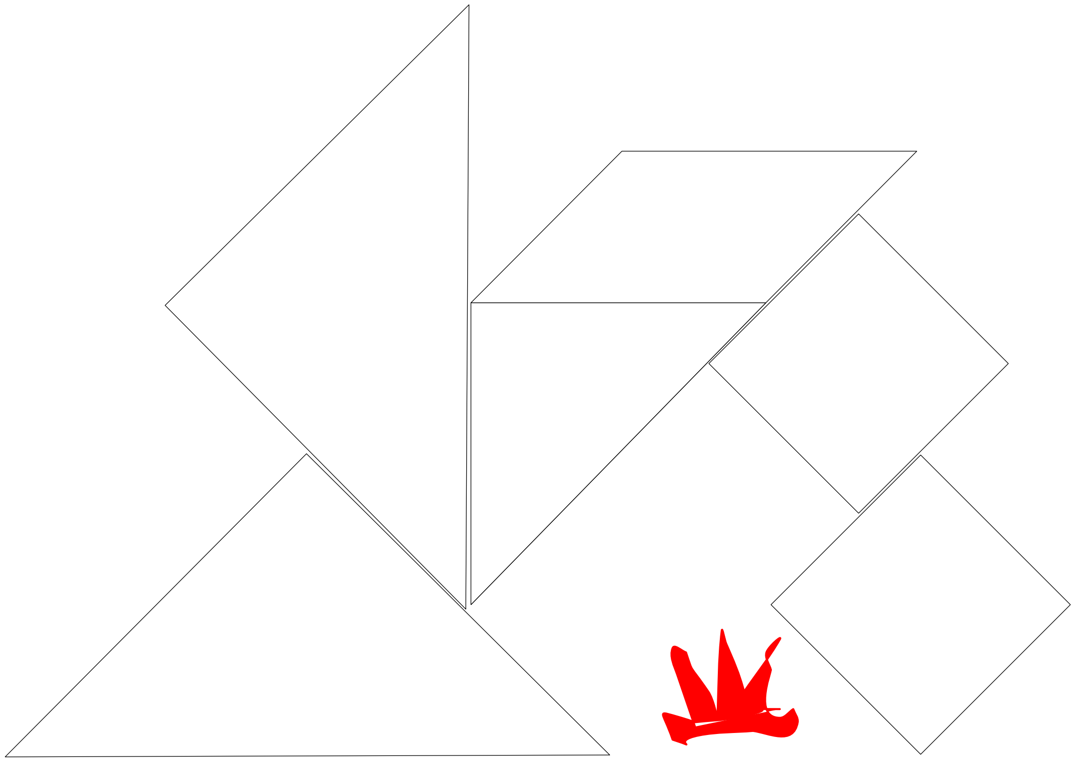


FIG.7 – “la grotta”

con tutti i 7 pezzi



Equiestensione

- Usando come campione uno dei triangoli piccoli, sapresti indicare quante volte è contenuto negli altri pezzi?

Il 3 (o il 6) è contenuto:

- 2 volte nel n.5
- 2 volte nel n.7 — i pezzi 4-5-7 sono equiestesi
- 2 volte nel n.4

- 4 volte nel n.1
- 4 volte nel n.2 — i pezzi 1 e 2 sono equiestesi

Se si uniscono alcuni pezzi del tangram per formarne un altro, corrispondente a uno dei 7 originali

- Quali pezzi possono essere formati da due pezzi? Prova a trovarli e disegnali.
    - I pezzi 4, 5 e 7 sono formati dai pezzi 3 e 6.

    Si possono fare anche con i pezzi "girati" (cioè con i numeri nascosti).

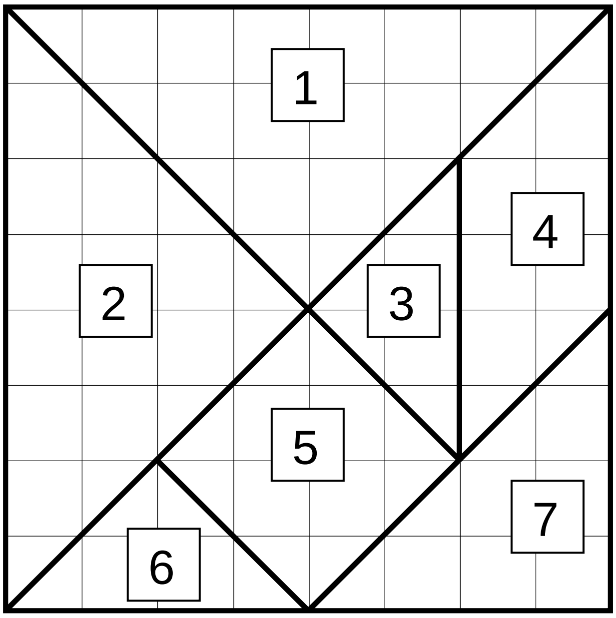
- Quali pezzi possono essere formati da tre pezzi? Prova a trovarli e disegnali.
    - I pezzi 1 o 2 sono formati dai pezzi 3, 4, 6, oppure dai pezzi 3, 5, 6, oppure dai pezzi 3, 6, 7.

    Si possono fare anche con i pezzi "girati".

- Ci sono pezzi che non possono essere formati da altri pezzi? Quali sono?
    - I pezzi 3 e 6 non possono essere formati da alcun pezzo .

(*Si può anche chiedere se ci sono pezzi formati da 4, 5 pezzi).

Aree e frazioni

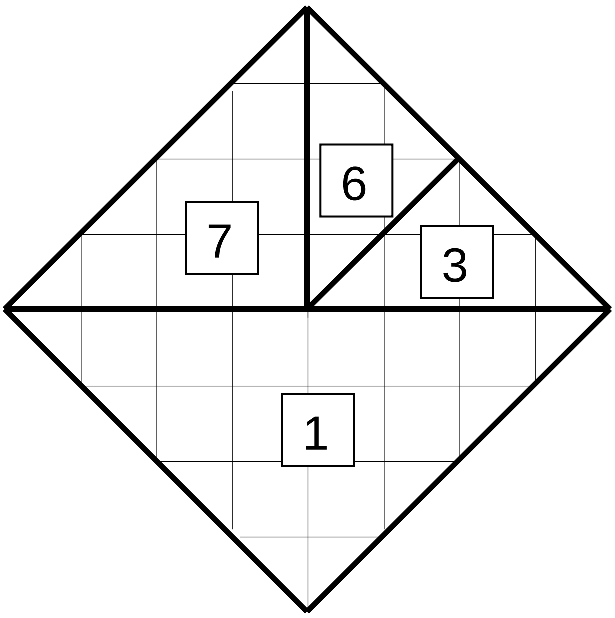


- quanti triangolini (3 o 6) sono contenuti in tutto il tangram?

$\boxed{16}$ triangolini

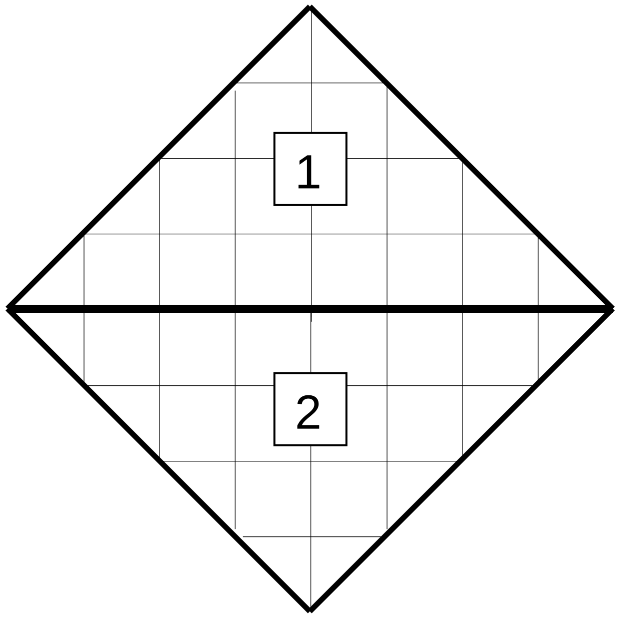
- utilizzando alcuni pezzi del tangram (una sola volta) costruisci altri quadrati in modo che siano rispettivamente 1/2, 1/4 e 1/8 dell'intero tangram

Ia)



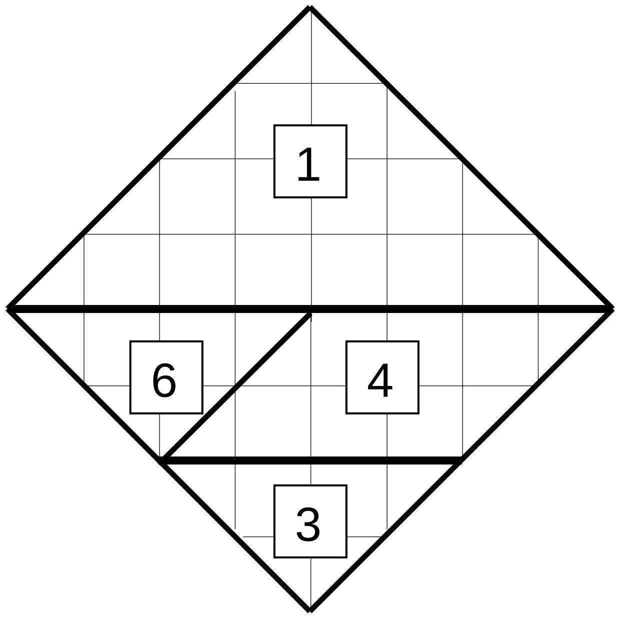
$\boxed{8}$ triangolini

Ib)



8 triangolini

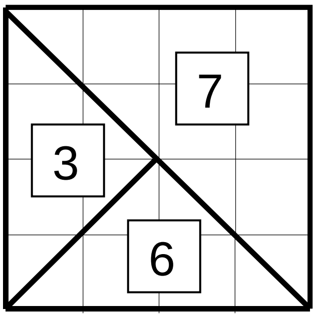
Ic)



8 triangolini

I tre quadrati disegnati qui sopra sono, ognuno, ½ del tangram e sono costruiti

- con i pezzi 1, 3, 6, e 7
- oppure con i pezzi 1 e 2
- oppure con 1, 3, 4, 6

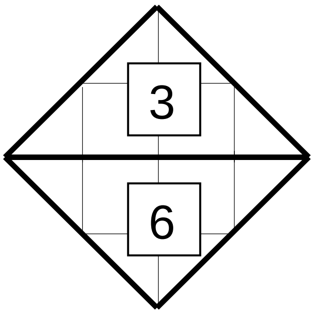


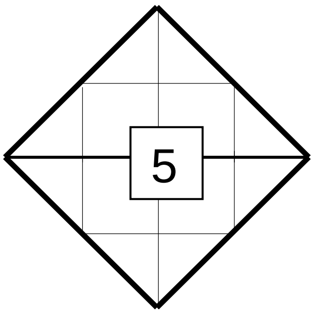
$\boxed{4}$ triangolini

Il quadrato qui sopra è ¼ del tangram iniziale ed è costruito con i pezzi 3, 6, e 7.

Invece i quadrati costruiti qui sotto sono 1/8 del tangram e sono costruiti rispettivamente

- con i pezzi 3 e 6,
- oppure con il pezzo 5.

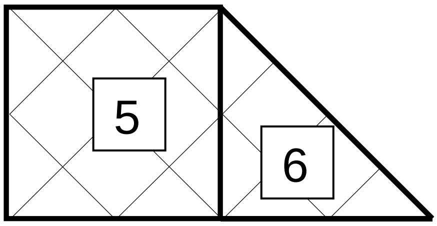




$\boxed{2}$ triangolini

- costruisci un trapezio rettangolo che sia esteso il doppio di quello dato qui sotto che è formato dai pezzi 5 e 6 ed è esteso 3 “triangolini”.

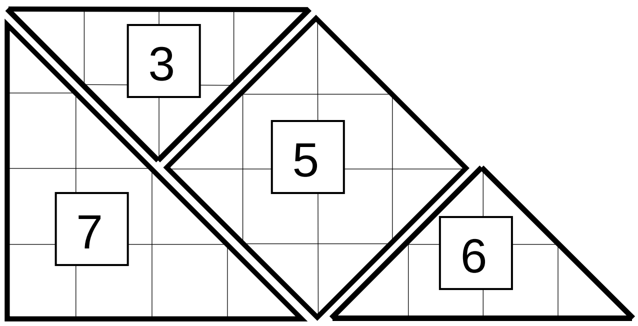
A)



$\boxed{3}$ triangolini

La figura richiesta è la seguente:

B)



$\boxed{6}$ triangolini

Se la si confronta con la precedente. Si osserva che è formata dai pezzi 3-5-6-7 ed è simile alla figura “A”

(*Può essere formata anche con i pezzi 3-4-6-7, oppure 1-7)

- E’ possibile, secondo te, costruire un trapezio rettangolo, “C”, che sia esteso il doppio della fig. “B”?. Prova. (*È possibile con i pezzi 1-2-3-4-6, oppure con 1-2-3-5-6, oppure con 1-2-3-6-7)

  Se pensi di sì, prova a rispondere alle domande:

  1. Se la fig. “C” è il doppio della fig. “B”, allora la fig. “C” com’è rispetto ad “A”?
  2. la figura “A” che parte è della fig. “B”?
  3. la figura “A” che parte è della fig. “C”?
  4. la figura “B” che parte è della fig. “C”?

Parte terza

Articoli di riferimento

IL SENSO DELLO SPAZIO

di **John J. Del Grande**

Traduzione da:

“Spatial sense”, in *Arithmetic Teacher* 37, 6 (1990), pp. 14-20.

Il senso spaziale è, in parte, “un feel intuitivo per il mondo che ci circonda e gli oggetti che si trovano in esso”. Nella letteratura matematica e psicologica il senso spaziale è usualmente riferito come percezione spaziale o visualizzazione spaziale. E' attraverso i loro occhi che i bambini acquisiscono gli schemi, le forme, la posizione ed il movimento degli oggetti. Tuttavia il cervello, mentre elabora questi input visivi, acquisisce in parallelo elaborazioni di suoni, di sensazioni tattili, di profumi, di posizioni del corpo come pure di esperienze passate rilevanti (Zimbardo e Ruch 1977). La percezione da parte dei bambini dell'ambiente che li circonda e degli oggetti che si trovano in questo ambiente incorpora tutti quegli input sensitivi che li aiutano a scoprire come siano realmente il mondo esterno e le persone.

Brennan, Jackson e Reeve (1972), tra gli altri, suggeriscono che la percezione spaziale non consista di una singola abilità. Essi hanno identificato le seguenti 9 abilità: il copiare visivamente, il coordinamento oculo-manuale, il coordinamento destra-sinistra, la discriminazione visiva, la ritenzione visiva, il ritmo visivo, la chiusura visiva, le relazioni figura-sfondo, il linguaggio e la percezione. Frostig e Horne (1972) hanno identificato ed usato cinque di queste abilità nel loro programma di allenamento percettivo. Hoffer (1977) ha suggerito sette abilità di percezione visiva, le prime cinque della quali erano quelle identificate da Frostig e Horne. Queste sette abilità, che verranno discusse in seguito, sono risultate rilevanti nello studio della matematica ed in particolare della geometria.

Percezione spaziale

Coordinazione oculo-motoria

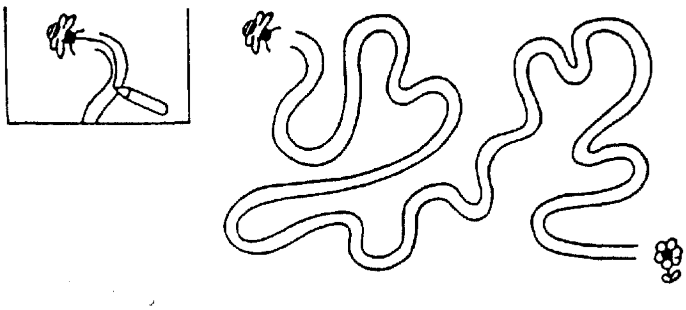
La coordinazione oculo-motoria è l'abilità di coordinare la visione con il movimento del corpo. Un bambino debole in questa attività “è così impegnato a concentrarsi su semplici abilità e movimenti motori, che ha difficoltà a pensare a qualcosa d'altro” [Hoffer 1977]. Per esempio, se i bambini hanno difficoltà a congiungere punti su una geocarta o a costruire strutture con blocchi di legno, “ci sono possibilità che non percepiscano o capiscano idee o concetti a vari livelli di astrazione”.

Misick (1978) ha stabilito che le azioni motorie sono collegate in qualche modo con la comprensione dello spazio e le dinamiche di questa relazione restano largamente sconosciute. Quando la coordinazione oculo-motoria diventa abituale, il bambino sarà capace di concentrarsi sull'apprendimento delle esperienze e di dedicare tutta l'attenzione all'atto dell'apprendimento. Pederson (1983) collega geometria ed attività motorie affermando che "la geometria è attività sia degli occhi e delle mani che della mente".

La coordinazione oculo-motoria è coinvolta in ogni attività quotidiana, come nel vestirsi, nel sedersi a tavola, nel mangiare. Le attività geometriche che coinvolgono la coordinazione oculo-motoria sono le seguenti:

- disegnare entro linee guida, come per esempio tracciare linee dentro cammini larghi, stretti, curvati, angolati (fig.1). I bambini sperimentano questa attività quando tracciano cammini dentro labirinti.
- Tracciare figure o colorare regioni.
- Disegnare senza guide, congiungendo punti con linee orizzontali, verticali, inclinate o curve. I bambini sperimentano questa attività quando disegnano su un geofoglio. I bambini trovano più facile congiungere i punti che richiedono linee verticali e orizzontali. Congiungere i punti con linee oblique o inclinate è più difficile.

Figura 1



Percezione figura-sfondo

La percezione figura-sfondo è l'atto visivo di identificare una componente specifica in una situazione e coinvolge spostamenti nella percezione di figure contro sfondi complessi dove sono usate forme che si intersecano e forme "nascoste". La percezione figura-sfondo può essere ulteriormente compresa notando che quando un bambino lancia una palla in una palestra, la sua attenzione è diretta alla palla. Le altre caratteristiche della palestra, come gli altri bambini e il pavimento, formano uno sfondo percepito indistintamente. Il mimetismo è un altro esempio di discriminazione figura-sfondo ed è usato da alcuni animali per difendersi dai predatori, facendo in modo che i loro "corpi" si perdano nello sfondo.

Fra le attività geometriche che riguardano la percezione figura-sfondo ci sono le seguenti:

- identificare una figura da un insieme di figure sovrapposte (fig.2);
- completare una figura (figura 3);
- assemblare una figura utilizzando le sue parti, come avviene per esempio nell'attività di tipo tangram.

Vurpillot (1976) cita ricerche che hanno mostrato che il 70% dei bambini di quattro anni è in grado di identificare figure sovrapposte in semplici disegni.

Figura 2

- Osserva la figura nel quadrato
- Riesci a ritrovarla nei disegni sotto?
- Ricalca la figura in ciascuno dei disegni

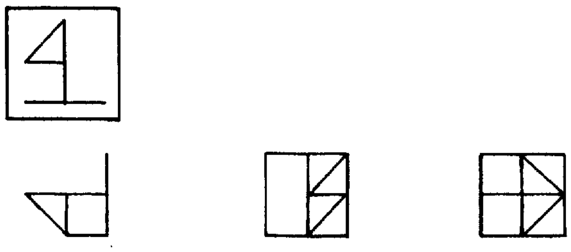
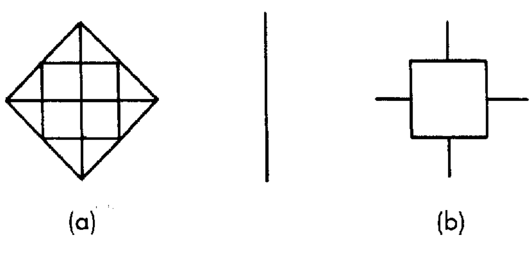


Figura 3

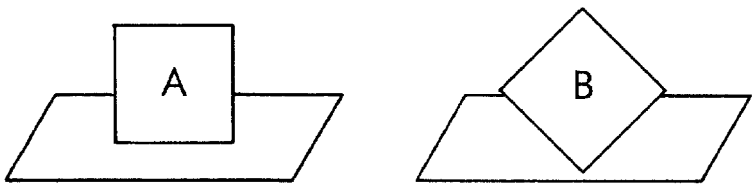
- Completa la figura in (b) in modo che appaia come la figura in (a)



Costanza percettiva

La costanza percettiva, o costanza della forma, implica il riconoscimento di certe figure geometriche presentate in una varietà di dimensioni, ombreggiature, contesti e posizioni nello spazio e la loro discriminazione da figure geometriche simili. Costanza percettiva fu un termine usato da Piaget e Inhelder (1956) in riferimento alla forma e alla dimensione degli oggetti. Vurpillot (1976) illustra la costanza percettiva usando il seguente esempio. Una carta quadrata è appoggiata con la sua base su un tavolo. Mentre il bambino la guarda, il quadrato è ruotato di 45° così che resti appoggiato su un vertice (fig.4).

Figura 4

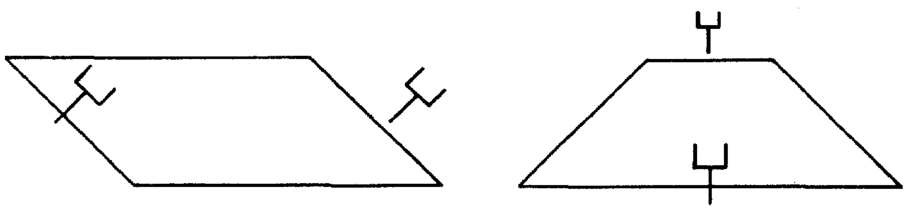


Vurpillot riporta i seguenti risultati:

- i bambini di quattro e cinque anni (e la metà di quelli di 6 anni) dicono che B non è un quadrato.
- I bambini di sei e sette anni dicono che B è lo stesso pezzo di carta di A ma non è più un quadrato (B conserva la sua identità individuale).
- I bambini di otto e nove anni dicono che B è un quadrato.

La costanza percettiva ci aiuta ad adattarci al nostro ambiente. Per esempio, quando percepiamo un campo di calcio, sappiamo che è rettangolare. La fig.5 mostra due viste di un campo di calcio, una come un parallelogramma, l'altra come un trapezio, ma in ciascuna visione noi percepiamo un campo rettangolare.

Figura 5



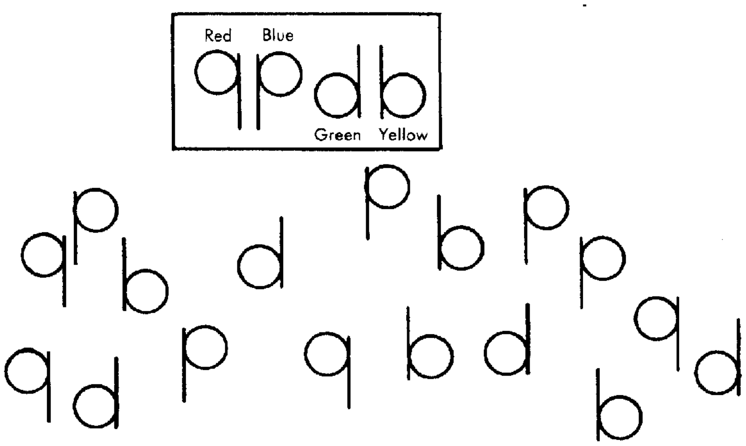
Tra le attività geometriche che riguardano la costanza percettiva vi sono le seguenti:

- Identificare le figure che hanno la stessa forma ma dimensioni diverse.
- Ordinare gli oggetti in accordo alla dimensione (per esempio dal più grande al più piccolo).
- Identificare figure che hanno stessa dimensione e forma.

Percezione della posizione nello spazio

La percezione della posizione nello spazio è la capacità di collegare un oggetto nello spazio con se stessi. Spazialmente i bambini sono centri del loro universo e percepiscono gli oggetti come al di là, sopra, sotto, accanto a se stessi. Un bambino con difficoltà nella percezione della posizione nello spazio probabilmente sperimenta inversioni nella lettura e corrispondenti difficoltà nella scrittura e nello scrivere l'aritmetica [Frostig e Horne 1964]. Attività che coinvolgono la percezione della posizione nello spazio, coinvolgono la discriminazione di figure inverse e ruotate (fig.6).

Figura 6



Gli insegnanti devono assicurarsi che i bambini comprendano ciò che significa "lo stesso". Per la percezione della posizione nello spazio esso significa "congruente e con lo stesso orientamento". In seguito, quando si tiene conto della discriminazione visiva, "lo stesso" verrà inteso nel senso di "congruente" - cioè figure che sono immagini l'una dell'altra sotto riflessione, traslazione o rotazione.

I metodi base usati da Frostig e Horne (1964) e da altri ricercatori per studiare l'abilità dei bambini relativa alla posizione nello spazio si basavano sul confronto di una coppia di figure congruenti o

quasi congruenti, poste o l'una accanto all'altra o vicine. I confronti consistevano in prove di differenziazione o di riconoscimento. I bambini sperimentavano la percezione della posizione nello spazio quando disegnano o identificano una figura e la sua immagine speculare, usando specchi di plexiglass (Miras).
In geometria l'abilità di identificare immagini traslate, riflesse e ruotate aiuta i bambini ad identificare figure congruenti in disegni complessi. Questa abilità è essenziale in molte attività che si incontrano negli studi di geometria.

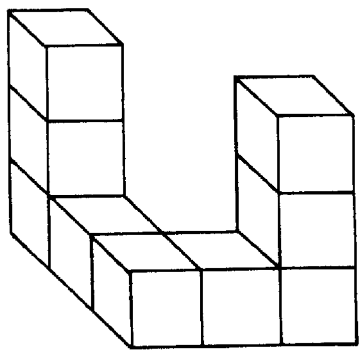
Percezione delle relazioni spaziali

La percezione di relazioni spaziali è l'abilità di vedere due o più oggetti in relazione con l’osservatore o in relazione tra loro. Per esempio, nel costruire una figura con cubi, un bambino deve percepire la posizione dei cubi in relazione a se stesso come pure la posizione dei cubi in relazione agli altri cubi. La fig.7 illustra un'attività adatta ai bambini di seconda.

Figura 7

Posizione relativa di due o più oggetti

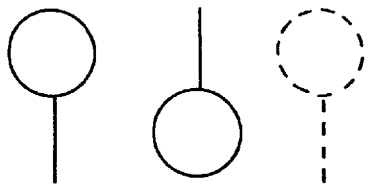
- Togli i cubi dal sacchetto
- Esegui una costruzione come la seguente



Un bambino per continuare una figura come quella illustrata in fig.8, ha bisogno di percepire la posizione delle figure in relazione l'una con l'altra e di creare un'immagine mentale della prossima figura prima di disegnarla.

Figura 8

Continua il disegno fino alla fine della pagina



Questa abilità è strettamente collegata con la percezione della posizione nello spazio per la esecuzione di alcuni compiti. Hoffer (1977) ha stabilito che “le operazioni di percezione spaziale visiva richiedono un forte senso dell’orientamento del corpo. Imparando le indicazioni spaziali e di profondità, il bambino può stimare e giudicare distanze di oggetti attorno a sé”. Queste abilità sono necessarie in situazioni reali come giocare a baseball e andare in bicicletta.

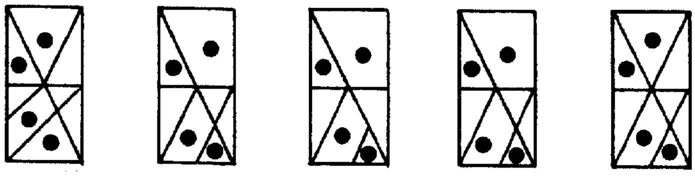
Discriminazione visiva

La discriminazione visiva è la capacità di identificare similarità e differenze tra oggetti. Mentre la percezione della posizione nello spazio e la percezione delle relazioni spaziali si basano fortemente sulla posizione dell'oggetto nello spazio, la discriminazione visiva è indipendente dalla posizione. Le attività di ordinamento e classificazione di oggetti e forme geometriche (come i blocchi che differiscono per colore, spessore, forma e dimensione) aiutano i bambini a sviluppare la discriminazione visiva mentre eseguono confronti verbali degli oggetti che vedono (Hoffer 1977).

Nella figura 9 ai bambini è stato chiesto di confrontare le figure a coppie e di esplorare tutte le possibilità. Questo compito richiede al bambino di confrontare tutte le possibili coppie di figure - una strategia organizzativa nel risolvere problemi che i bambini possono non possedere ma che può essere insegnata.

Figura 9

- Due figure sono identiche
- Cerchia le figure identiche



Memoria visiva

La memoria visiva è l'abilità di ricordare accuratamente oggetti non più in vista e di collegare le loro caratteristiche ad altri oggetti, in vista o no. Una persona dotata di memoria visiva eccezionale può possedere "memoria fotografica". La maggior parte della gente conserva una piccola quantità di informazione, da cinque a sette informazioni, per brevi periodi di tempo (Hoffer 1977). Per ricordare più quantità maggiori di informazione, la gente deve immagazzinare le cose nella memoria a lungo termine mediante astrazione e pensiero simbolico. Un'attività che può essere usata con bambini piccoli è quella di mostrare brevemente (per 5 secondi) il disegno di uno scaffale che contiene più giocattoli su mensole (fig.10a), nascondere la figura e chiedere loro di segnare, su un foglio preparato in precedenza, le linee che uniscono i giocattoli alle mensole sulle quali si trovano. Se l'attività risulta troppo facile per i bambini, può essere resa più difficile includendo giocattoli che non si trovano sulle mensole (fig.10b).

Figura 10a

Ricorda la posizione degli oggetti

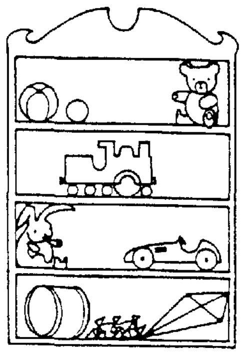
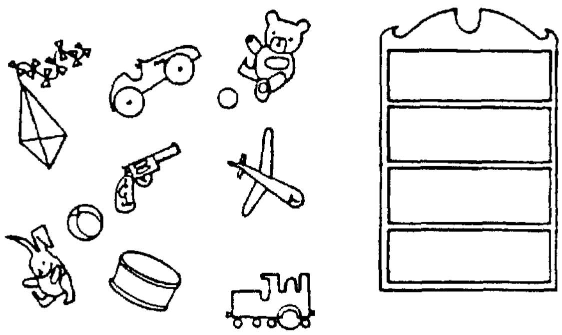


Figura 10b

Disegna una linea che collega ciascun oggetto alla mensola sulla quale si trovava



L'esempio precedente, che usa i giocattoli, serve per illustrare la necessità del senso spaziale nei compiti di ogni giorno. Tuttavia lo stesso tipo di esempio può essere proposto adoperando solidi geometrici, come cubi, cilindri, sfere, al posto dei giocattoli.

Attività simili si incontrano in geometria quando si chiede ai bambini di copiare una figura sul geofoglio (fig.11). La configurazione a sinistra viene mostrata brevemente e poi nascosta. Si chiede quindi ai bambini di disegnarla sul foglio di carta punteggiato mostrato a destra. Possono essere progettate attività più impegnative, chiedendo ai bambini di ripetere attività simili alle precedenti ma su un foglio di carta punteggiata dal quale mancano alcuni punti (fig.12 e fig.13).

Figura 11

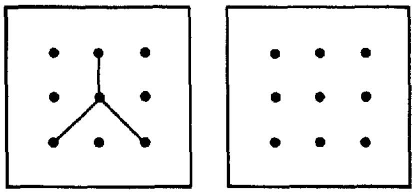


Figura 12

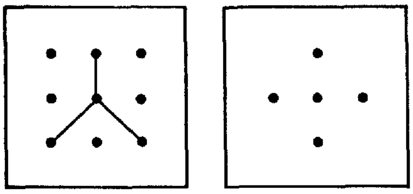
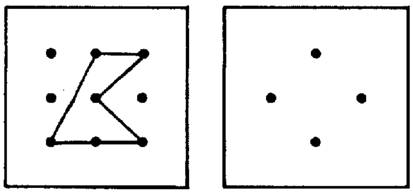


Figura 13



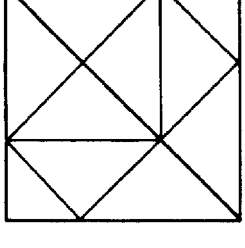
Senso spaziale e geometria

L'inclusione della geometria in un programma di scuola elementare è un fenomeno abbastanza recente. Gli psicologi hanno studiato il senso spaziale e le abilità spaziali per molti anni e solo recentemente gli insegnanti di matematica hanno preso seriamente in considerazione la relazione tra abilità spaziali e sviluppo di concetti geometrici. Attraverso lo studio di questa relazione, gli insegnanti saranno capaci di identificare come i bambini imparano la geometria e di diagnosticare le difficoltà nei processi di apprendimento. In aggiunta al lavoro degli psicologi dell'insegnamento, un numero crescente di dati provenienti dagli insegnanti indica che i bambini possono svolgere assai bene compiti geometrici quando questi compiti sono connessi con le abilità spaziali dei bambini. Le abilità spaziali frequentemente coinvolgono scivolamenti, rotazioni o ribaltamenti mentali di oggetti; le attività sono per natura trasformazionali. Perciò una geometria appropriata per un bambino dovrebbe svilupparsi partendo dall'intuizione e da attività sperimentali che coinvolgono il moto di oggetti nello spazio.

Molti concetti della geometria non possono essere riconosciuti o capiti a meno che il bambino non percepisca visivamente esempi e non identifichi figure e proprietà, associandole con esperienze precedenti (Hoffer 1977). Per esempio, per comprendere il concetto che un triangolo e la sua immagine trasformata sono congruenti, il bambino deve prima possedere la percezione della costanza della forma ed è necessario che questa percezione sia acquisita attraverso esperienze, come le attività che coinvolgono oggetti che si muovono. Nell'interiorizzare il concetto di rettangolo, il bambino ha bisogno di una comprensione visiva della figura. Per esempio, uno impara a riconoscere rettangoli e a differenziarli dalle altre figure. Quindi i bambini tracciano rettangoli ed imparano a copiarli. Infine i bambini disegnano rettangoli a memoria, pensando al rettangolo come ad un membro di un'intera classe di figure rettangolari.

I bambini riconosceranno ciò che sono indirizzati a vedere. Per esempio, se si dà ai bambini il disegno di figura 14 e si chiede loro di descrivere le figure inserite, essi non vedono i trapezi, a meno che la loro attenzione sia indirizzata verso di essi.

Figura 14



Gli insegnanti di matematica, nel fare disegni a mano libera dovrebbero essere consci che la povertà delle loro figure (cioè, linee perpendicolari che non lo sono, cerchi o triangoli equilateri mal disegnati) può causare confusione nella mente dei bambini. Si chiede al bambino di immaginare queste figure, ma facendo questo si ritiene che i bambini abbiano concetti già formati. I bambini hanno bisogno di acquisire questi concetti da disegni accurati, modelli, ritagli ed altre esperienze concrete, che includono trasformazioni, prima che ci si possa attendere che "visualizzino ed immaginino".

La geometria è risultata difficile ai bambini a causa dell'enfasi posta sui suoi aspetti deduttivi e dell'aver trascurato di sottolineare le abilità spaziali sottostanti, acquisite attraverso attività manuali, che sono prerequisiti necessari per comprendere e maneggiare i concetti di geometria. Le abilità nella percezione visiva ed i concetti geometrici possono essere appresi simultaneamente, poiché la geometria richiede che il bambino riconosca le figure, le loro relazioni e le loro proprietà. La geometria informale a livello di scuola elementare può facilmente essere pensata come il risultato del miglioramento della percezione spaziale del bambino (Del Grande 1986). Poiché i miglioramenti nelle abilità spaziali e l'apprendimento della geometria sono interdipendenti, allora, come in una reazione a catena, un miglioramento in un campo porta ad un miglioramento nell'altro campo.

Coxford (1978) ha eseguito un grosso case study sulle relazioni tra senso spaziale e geometria. Egli ha scritto: "I sostenitori dello sviluppo e quelli dell'intervento (forse più comunemente chiamati psicologi ed insegnanti di matematica) hanno bisogno di sviluppare una forte relazione tra di loro per ottenere risultati nello sviluppo dei concetti dello spazio e della geometria". Gli psicologi dovrebbero fornire "l'informazione basilare relativa a molti concetti spazio-geometrici mentre gli insegnanti di matematica dovrebbero intervenire al momento opportuno". I materiali di geometria per i bambini della scuola elementare sono stati e sono tuttora progettati per migliorare l'apprendimento dei concetti geometrici attraverso attività di trasformazione che si fondano essenzialmente sul senso spaziale (Del Grande 1972; Del Grande e Morrow 1978; Giles 1984). Gli insegnanti hanno ora bisogno di collegare la base teorica alla pratica pedagogica per aiutare i bambini a sviluppare il loro senso spaziale, che consiste di abilità richieste per ottenere buoni risultati, in futuro, sia in matematica che in altri campi.

Bibliografia

Bishop, Alan J., “Space and geometry”, in *Acquisition of mathematics concepts and processes*, edited by Richard Lesh and Marsha Landau, New York, Academic Press, 1983, pp. 175-203.

— “Spatial abilities and mathematics education”, in *Proceedings of the forth international congress on mathematical education*, Boston, Birkhauser Boston, 1983.

Brennan, Wilfred, Jackson, Jean, Reeve, Juliet, *Look: vision perception materials*, London, Macmillan, 1972.

Coxford, Arthur F., “Research directions in geometry”, in *Recent research concerning the development of spatial geometric concepts,* edited by Richard Lesh, Columbus, Ohio, ERIC/SMEAC, 1978.

Del Grande, John J., *Can grade two children’s spatial perception be improved by inserting a trasformation geometry component into their mathematics program?*, Ph. D. diss. University of Toronto, 1986.

— *Geoboards and motion geometry for elementary teachers*, Chicago, Scott, Foresman & Co., 1972.

Del Grande, John J., Morrow, Lorna J., *Starting geoboard activities*, Books I-V, North York, Ont., Board of Education for the City of North York, 1978.

Frostig, Marianne, Horne, David, *The Frostig program for the development of visual perception*, Chicago, Follett Publishing Co., 1964.

— *Pictures and Patterns*, Chicago, Follett Publishing Co., 1972.

Giles, Geoff., *DIME mathematics*, Norfolk, Eng., Tarquin Publications, 1984.

Hoffer, Alan R., *Mathematics resource project: geometry and visualization*, Palo Alto, Calif., Creative Publications, 1977.

Musik, Judith Smith, “The role of motor ability in young children’s understanding of spatial concepts”, in *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*, Columbus, Ohio, ERIC/SMEAC, 1978, pp. 85-104.

National Council of Teachers of Mathematics, Commission on Standard for School Mathematics, *Curriculum and evaluation and standards for school mathematics,* Reston, Va., The Council, 1989.

Pederson, Jean, “Why we still need to teach geometry”, in *Proceedings of the forth international congress on mathematical education*, Boston, Birkhauser Boston, 1983, pp. 158-59.

Piaget, Jean, Inherder, Barbel, *The child's conception of space*, New York, W.W. Norton & Co., 1956.

— *Mental imagery in the child*, London, Routledge & Kegan Paul, 1966.

Robinson, Edith, "Mathematical foundation of the spatial and geometric concepts", in *Space and geometry*, edited by L. Martin, Columbus, Ohio, ERIC/SMEAC, 1976, pp. 7-30.

Vurpillot, Eliane, *The visual world of the child*, London, George Allen & Unwin, 1976.

Zimbardo, Philip G., Ruch, Floyd L. *Psychology and Life*, Chicago, Scott Foresman & Co., 1977.

IMAGERY E APPRENDIMENTO MATEMATICO

di **Grayson G. Wheatley**

Traduzione da:

"Imagering and Mathematics Learning" in *Focus on Learning Problems Mathematics*, 2&3 (1998), pp. 65-77.

I termini abilità spaziale e visualizzazione spaziale hanno assunto molti significati diversi. I modi in cui i termini sono stati definiti e gli strumenti usati per raccogliere i dati sono praticamente tanti quanti sono i numeri di studi che li hanno utilizzati. In questo articolo io userò i termini "imaging" ed "image" piuttosto che visualizzazione spaziale per evitare ogni errore di comprensione che potrebbe risultare dalle diverse definizioni. Per il modo in cui viene qui usato, l'imaging è un'attività mentale piuttosto che il punteggio di un test (Wheatley, 1990). Quando una persona vede o più generalmente sente un fenomeno, può essere costruita un'immagine. La costruzione delle images è un'operazione di adattamento fondamentale. Noi distinguiamo oggetti/persone gli uni dagli altri confrontando le images.

Lakoff (1987) distingue le images ricche e gli schemi di images. Per i suoi propositi la distinzione è utile e chiara. In questo articolo viene invece prestata più attenzione a ciò che lui chiama schemi di images, anche se il termine imaging abbraccia ambedue i costrutti; questi di fatto descrivono diversi livelli di astrazione. Per Johnson (1987) e Lakoff (1987), le images ricche sono statiche, fisse e contengono molti dettagli. Ricordiamo per esempio l'image di una tenda che comprende il colore, il tessuto, la forma e forse l'odore. D'altra parte noi possiamo formare uno schema di images di un prisma triangolare che può essere trasformato per allungamento, dilatazione, rotazione – è un'astrazione. L'image del triangolo inscritto in una circonferenza comprende le relazioni coinvolte di inscrivere e di tangenza, come pure il significato di circonferenza e di triangolo. Questo è l'esempio di uno schema di images piuttosto che di un'image ricca. Gli schemi di images possono essere trasformati mentalmente considerando varie posizioni del triangolo nella circonferenza, o diversi tipi di triangoli. Lo schema di images è astratto e dinamico – non viene visionata una particolare figura. Gli schemi di images sono essenziali nella concettualizzazione.

L'imaging non è esattamente il processo di costruire una figura mentale e di recuperarla dalla memoria (Wheatley e Cobb, 1991). Come stabilito da Lakoff (1987) "differenti persone, guardando una situazione, noteranno differenti cose. La nostra esperienza di vedere può dipendere moltissimo da ciò che sappiamo riguardo a ciò che stiamo guardando. E ciò che vediamo non necessariamente si trova lì dentro”. Ad una bambina di 9 anni è stato chiesto di disegnare il triangolo rettangolo mostrato a sinistra nella figura

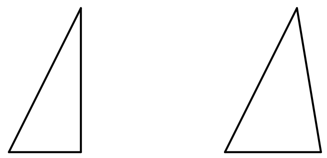


Figura 1: Tentativo di Tammy di copiare un triangolo rettangolo

Ogni volta che lei ha tentato di disegnarlo, il segmento di destra era inclinato come mostra la figura di destra. Lei sapeva che il suo disegno non appariva giusto, ma era talmente influenzata dal suo concetto inerente l’immagine che si era costruita di triangolo che non riusciva a convincersi a disegnare un lato verticale – per lei i lati del triangolo “pendono”. Le immagini sono più utili se sono fluide e dinamiche.

Forse il modo più utile di pensare la parola image è come metafora (Wheatley, Brown, 1994). A tutt’oggi non esistono meccanismi esplicativi soddisfacenti per le immagini mentali. Pensare in termini di reazioni chimiche corticali è ingombrante e fino ad ora improduttivo. Caratterizzare il pensiero come l’accensione di neuroni non è utile, specialmente da quando è stato dimostrato che le cellule possono comunicare l’una con l’altra *direttamente* quando è presente ossido d’azoto (Montague, Grancayo, Winn, Marchase & Friedlander, 1994). Sebbene nella mente non ci sia alcuno schermo di proiezione sul quale le images possono essere viste, l’attività di tipo imaging spiega molti fenomeni e può portare a migliorare la pratica didattica. In tal modo la parola image agisce come una metafora di un’attività mentale che non possiamo pienamente spiegare in termini di funzionamento neurale.

L’imaging coinvolge tre attività, la costruzione dell’image, la ri-presentazione dell’image, la trasformazione dell’image. Ciascuna di queste tre componenti verrà ora discussa.

Costruzione dell’image

La costruzione di un’image è il più fondamentale dei tre processi. Se uno studente fallisce nell’iniziale costruzione dell’image non c’è niente né da ripresentare né da trasformare. La qualità di un’image costruita determina come l’image potrà essere usata nelle situazioni successive. Mentre sono occupati nell’attività matematica sia di natura numerica che geometrica, gli studenti costruiscono images. Per esempio ad essi può essere mostrata brevemente una figura geometrica e si può chiedere loro di disegnare quello che hanno visto. Quando fanno i loro disegni essi stanno operando con l'image costruita. La natura e la qualità dell'image influenzerà il disegno risultante. Uno studente ha detto che poteva "vedere" chiaramente la parte superiore, mentre la parte inferiore era confusa. Un'image può variare in nitidezza ed estensione. Un'image può essere chiara e ricca di dettagli o confusa e generale. Analogamente un'image costruita può non abbracciare l'intera figura vista o sperimentata. Quando un'image viene costruita, solo certe caratteristiche dell'esperienza vengono incluse. In termini piagetiani la natura dell'image dipende dal modo in cui l'esperienza viene assimilata negli schemi operazionali. La natura dell'image dipende dalle precedenti costruzioni mentali, dalle intenzioni, dalla situazione nella quale l'image è costruita.

È istruttivo considerare la natura delle images costruite. In alcuni casi l'individuo forma una rigida descrizione mentale che può limitare il suo ragionamento. Per esempio, alcuni studenti formano un'image del "triangolo isoscele" come figura a tre lati con base orizzontale ed angolo al vertice sopra la base. Se questa image del triangolo è la loro unica image di un triangolo, allora il concetto di triangolo è assai limitato. Johnson (1987) chiama questo tipo di costruzione un'image ricca, intendendo ricca di dettagli ma non flessibile. Piaget (1968) indica questo tipo di image come figurativa, contrapposta a quella operativa. Altri l'hanno descritta come un dipinto nella mente. In tal modo la parola image è stata tipicamente usata in riferimento a ciò che Johnson chiama "image ricca" e Piaget indica come immagine figurativa. Il pericolo con la visione dell'image come "figura nella mente" è quello di pensare che la figura sia la stessa per tutti e questo non è vero. Ciò che un individuo costruisce dipende dai suoi schemi operativi (Piaget) o dai suoi schemi di image (Johnson). Considera la figura 2. Per un bambino di otto anni può essere costruita come intersezione di linee rette e curve mentre per un matematico è la simbolizzazione grafica della variazione inversa.

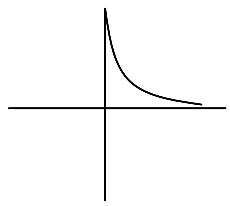


Figura 2: disegno con interpretazioni multiple

Ri-presentazione

Una volta che l'immagine è stata costruita, non è necessario mantenerla presente. Quando è necessario, essa può essere ripresentata. Per esempio se vedi il logo di una ditta ed in seguito vuoi rappresentarlo, esso deve essere ripresentato grazie all'intervento di tutte le attività mentali. Quando tenti di tracciare il logo, la tua image di esso (che può essere differente da quella di altri) viene ripresentata. La nitidezza della ripresentazione dell'image varierà nettamente in funzione di numerosi fattori. Per esempio, io voglio pianificare il mio percorso dall'ufficio alla scuola che si trova dall'altro lato della città. Se conosco bene la città, posso ripresentare una mappa della città costruita in precedenza e tentare varie strade fino ad ottenere la migliore. Nell'apprendere la matematica ciascuno di noi costruisce una serie di images personali che possono assisterci nella risoluzione dei problemi o nel fare nuove costruzioni matematiche. Queste images sono ripresentate quando sorge la necessità.

Quando ai bambini vengono mostrate brevemente delle figure e si chiede loro di disegnare ciò che hanno visto, essi si ripresentano l'image (Wheatley, 1996). Questo atto di ripresentazione è complesso e delicato. Per esempio Piaget (1968) ha mostrato che l'image costruita quando si guarda un insieme di bastoncini sistemati a forma di scala può subire cambiamenti durante il tempo che passa senza vedere la scala. In molti casi l'image ripresentata può in realtà diventare più elaborata. Inoltre la natura della ripresentazione è influenzata molto dalle intenzioni e dagli obiettivi dell'individuo al momento della ripresentazione.

Trasformazione dell'image

Una volta che l'image è stata costruita e ripresentata, essa può essere trasformata.

Per esempio possiamo sapere quale figura può essere ottenuta se lo schema della figura seguente viene piegato e incollato. I bambini devono mentalmente piegare le parti e costruire un'image della figura tridimensionale che risulta. Qualcuno può avere difficoltà a fare questa trasformazione mentale dell'image della figura.

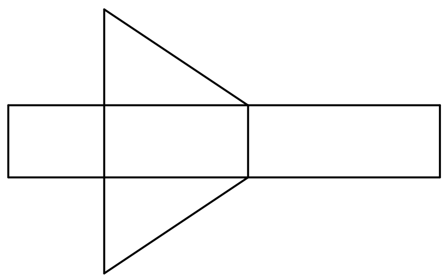


Figura 3: Uno sviluppo piano di una figura tridimensionale

Un bambino può decidere se le due figure mostrate in figura 4 sono "la stessa figura" ruotando l'immagine di sinistra fino ad avere lo stesso orientamento dell'immagine di destra.

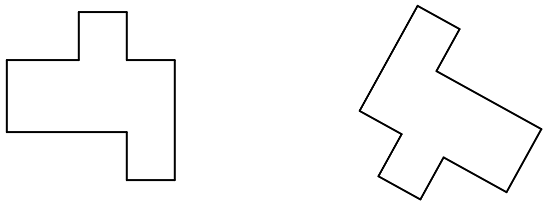


Figura 4: Rotazione dell'image

Noi possiamo intenzionalmente trasformare la nostra immagine di y = sen x nel costruire il grafico di y = 3 sen x. Nella risoluzione dei problemi possiamo chiederci quale rettangolo inscritto in una semicirconferenza abbia area maggiore. Possiamo mentalmente variare le forme dei rettangoli, rendendoci conto che l'area si avvicina a zero quando la larghezza si avvicina a zero e quando l'altezza si avvicina al raggio. Quando una persona sente la parola rettangolo, richiama alla mente l'image standard del rettangolo, quello che Rosch chiama prototipo (citato in Lakoff, 1987). A seconda della natura del compito, si può trasformare il prototipo in un lungo sottile rettangolo o in un quadrato. I bambini trasformano images anche nel compiere operazioni aritmetiche. Per esempio, quando si somma 7+5, un bambino può trasformare il 5 in 3 + 2, combinare 7 e 3, ottenendo 10 ed aggiungere infine 2 fino ad arrivare a 12.

Senso del numero e senso dello spazio

Il National Council of Teachers of Mathematics (1987) ha identificato il senso del numero ed il senso dello spazio come obiettivi centrali nell'insegnamento della matematica. Questi termini vengono spesso considerati separatamente, con il senso del numero che si riferisce all'ambito numerico ed il senso dello spazio a quello geometrico. Tuttavia un'attenta lettura di ciò che si intende per senso del numero suggerisce che gran parte di esso è basato sull'image.

Per esempio: possiedono il senso del numero quelle persone che "hanno ben sviluppato le relazioni multiple tra i numeri. Esse possono determinare 27+19 nei seguenti modi:

19 = 20 – 1	27+20 = 47	47 – 1 = 46
27 – 1 = 26	19 + 1 = 20	26 + 20 = 46
19 = 16 + 3	27 + 3 = 30	30 + 16 = 46

Le persone che sanno utilizzare in maniera flessibile queste strategie, che sono indicative del senso del numero, lavorano spesso, se non sempre, con images piuttosto che con numeri. Esse possono usare un'image di un piatto di una bilancia per ragionare che alcuni cambiamenti da 27 a 19 non

cambiano la somma, oppure possono lavorare sull'image di una linea numerica o di una tavola pitagorica.
In generale le relazioni tra numeri sono basate su alcuni tipi di images. Formando images siamo capaci di formare una rete di significati che ci permettono di riformulare espressioni numeriche in vari modi.
Il senso dello spazio come concettualizzato dal NCTM è lo sviluppo di relazioni geometriche e l'abilità di utilizzarle in diversi contesti. Il senso dello spazio si riferisce alle operazioni in un contesto geometrico. La costruzione di tali relazioni è chiaramente un caso di utilizzo di images. La nostra ricerca suggerisce che le images sottostanno sia al senso del numero che al senso dello spazio e sono quindi un costrutto fondamentale (Wheatley & Reynolds, 1996). Inoltre quando riflettiamo su questi "sensi" sembra che ambedue poggino fortemente su images e la distinzione tra di essi sembra sfumata. Se forniamo ai bambini l'opportunità di sviluppare ed usare images, sia il senso del numero che il senso dello spazio verranno migliorati.

Un legame tra imaging e numero

I bambini sviluppano il senso del numero quando costruiscono images di numeri. Di recente ho costruito una serie di interviste cliniche con bambini di prima usando l'attività delle caramelle nascoste.
Al bambino viene presentato un insieme di caramelle e gli si chiede di contarle. Quando l'intervistatore è riuscito a creare un clima di fiducia ed il bambino è sicuro, per esempio, che le caramelle sono 9, alcune caramelle vengono raccolte con una mano e le altre con l'altra. L'intervistatore mostra il contenuto di una mano e chiede "Quante caramelle ci sono in questa mano?" (la mano chiusa) Il modo in cui il bambino risponde è indicativo delle sue costruzioni numeriche. Se il bambino è incapace di indicare quante caramelle ci sono nella mano chiusa, significa che non ha ancora costruito una relazione parte – parte – tutto. Una volta che il bambino vede le caramelle nella mano aperta, non è in grado di collegarla al numero visto in precedenza.
Si chiede allora al bambino di disegnare 9 cerchi sulla carta. Con i cerchi in vista, deve ripetere l'operazione con un numero diverso, per esempio 7. Le 7 caramelle sono poste dal bambino in 7 cerchi. Quando l'attività è presentata in questo modo i bambini sono quasi sempre capaci di rispondere in maniera corretta.
La cosa interessante è che quando la carta viene tolta i bambini rispondono molto meglio di prima e mostrano di pensare il tutto quando viene mostrata la parte. Alcuni guardano dove c'erano i cerchi o indicano nell'aria i cerchi "scoperti". Sebbene sia troppo azzardato asserire che questi bambini siano passati al livello di pensiero parte – parte – tutto come risultato dell'aver partecipato a questa

attività di imaging, i bambini hanno avuto risultati più positivi e sembravano formare, in questo contesto, relazioni del tipo parte – parte – tutto.

L'uso delle tabelline può aiutare ad immaginare i numeri da 1 a 100 e a costruire schemi basati sulla posizione relativa dei numeri sulla tabellina. In molte altre interviste con bambini di tutte le età, l'uso di ragionamenti basati sulle images ha contribuito all'apprendimento matematico.

La relazione tra imaging e conoscenza matematica potrebbe non essere stata osservata in altri studi a causa del modo in cui la visualizzazione era definita e della natura delle attività matematiche. Se il conteggio del numero dei disegni fatti nel risolvere problemi viene usato come misura della visualizzazione, allora la correlazione con i risultati in matematica può non essere alta; l'imaging è un'attività mentale e quelle persone che hanno costruito images elaborate possono non averne bisogno.

Inoltre, se la matematica è altamente procedurale, come capita in molte classi, il formare images non viene incoraggiato. In molte classi si richiede che gli studenti utilizzino metodi prestabiliti ed in tal modo le relazioni di imaging non hanno alcun ruolo. Interviste cliniche hanno permesso di evidenziare un utilizzo dell'imaging da parte dei bambini, che non sarebbe emerso in un test scritto (Brown, 1992; Reynolds, 1993). Un bambino di quinta aveva parlato raramente; ma ponendogli opportune domande è stato possibile documentare il suo uso dell'imaging (Brown, 1993).

Un esempio di images dinamiche

In un esperimento di insegnamento di quindici mesi con un bambino veramente precoce, Michael, che aveva sette anni, è stato messo in evidenza il potere delle images nell'apprendimento della matematica. Per esempio egli guardava l'equazione $y = x^2 – 5x$ e la descriveva come una parabola chiudendo le mani in basso a forma di parabola aperta verso l'alto. Le sue parole e le sue azioni mostravano chiaramente che egli aveva costruito un'image di una curva particolare basandosi sulla vista dell'equazione algebrica. In molte altre occasioni aveva descritto una curva sugli assi coordinati dopo aver guardato l'equazione. Nel considerare l'equazione $y = x^2 – 5x$ egli pose la domanda: "Quando y supera in grandezza x?" Questa domanda ha suggerito l'idea che egli avesse costruito una relazione dinamica tra due variabili, x e y e che egli stesse considerando l'interrelazione.

È curioso l'uso del termine "supera in grandezza". Esso fa parte chiaramente del linguaggio di Michael poiché la parola non era stata usata da nessuno di noi nelle precedenti sessioni. "Superare in grandezza" indica un confronto tra il valore relativo di due variabili. La sua equazione suggerisce anche che egli fosse consapevole che, per certi valori di x, x è più grande di y mentre per altri il valore di y è superiore. Quando abbiamo discusso la natura della curva in un intervallo di x, (da –1 a 6) è risultato chiaro che Michael possedeva una image prototipo di una parabola. Egli stava pensando olisticamente, non sequenzialmente. Si ha un'indicazione del fatto che egli ha concettualizzato una relazione dinamica tra due variabili. Egli ovviamente ha costruito il piano delle coordinate come un sistema simbolico utile nel pensare le relazioni. Questo episodio è un chiaro esempio di ragionamento basato sull'image.

M: Dunque, partirà … e quindi salirà

M: Quando la prendi più alta, y supererà in grandezza x. Ma quando x smetterà di superare in grandezza y? y è superato qui (indicando x = 1).

W: Ma y è negativo.

M: Dunque, x è più grande. Così x sta superando y qui (scrive 1, -4). In realtà è una parabola! (Forma una parabola con le mani unendole assieme in basso) e il suo punto più basso è 2,5 per x.

W: Quando x smetterà di superare y?

M: (risponde immediatamente) In 6… Sì sei! Quindi nelle altre parti oltre il 6 viene superato.

Michael prende quindi una calcolatrice e calcola il valore di y corrispondente a x = 6,01 come evidenza della sua asserzione.

Questo cambio mostra la natura dinamica dell'imaging di Michael. Non solo egli pensa ad un punto che si muove lungo una curva ma considera delle coordinate x e y di questi punti. Egli è interessato a quando la coordinata y diventa per la prima volta più grande di x sul grafico. Egli sa che x e y sono uguali nell'origine e che x è più grande di y in un intervallo proprio a destra dell'origine.

L'aspetto caratteristico della matematica di Michael è che egli non conosce procedure di calcolo complesse che gli siano state insegnate. Di fatto non gli è stata mostrata la procedura per moltiplicare numeri a due cifre. Questo non significa che egli non può moltiplicare 37x84 perché egli lo sa fare; egli utilizza un metodo costruito da lui stesso.

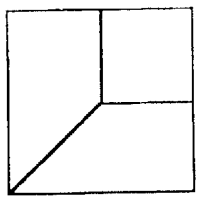
Differenze individuali

In tutte le caratteristiche personali, siano esse altezza, peso, velocità di corsa o intelligenza viene osservato un ampio spettro di differenze personali. Le differenze tra gli individui nell'imaging non sono meno varie. Alcuni studenti sono abili nel formare images ricche ed images astratte elaborate mentre altri hanno bisogno di più tempo e non formano images altrettanto potenti. Tuttavia tutti gli studenti sanno ricavare profitto dall'opportunità di sviluppare images nel fare matematica. Proprio come tutti gli studenti imparano a parlare, tutti possono imparare ad usare images. Procurando loro molte attività progettate per facilitare l'imaging, noi possiamo aiutare i nostri studenti ad ottenere un maggior successo in matematica.

Molta della matematica esemplificata nei libri di testo in commercio è procedurale piuttosto che concettuale, concedendo spesso poca libertà nel formulare idee in un modo che abbia un senso personale. In queste condizioni gli studenti sono indotti a pensare che la matematica sia costituita da regole e procedure. In questo ambiente gli studenti possono sviluppare poche immagini utili al fare matematica. Essi devono basarsi pesantemente sulla memorizzazione, seguendo direzioni e modi di operare lineari e sequenziali, e non formano l'intenzione di usare images. Può capitare che quella parte del cervello che elabora images sia utilizzata poco. Di fatto noi possiamo aiutare gli studenti a formare l'intenzione di costruire images e creare in loro la fiducia nell'utilizzo di imaging nel risolvere problemi di matematica.

Aiutare gli studenti ad imparare mediante l'imaging

Si è visto che le attività del "mostrare rapidamente" costituiscono un ambiente ricco per le costruzioni matematiche basate sull'imaging. Un disegno geometrico come quello riportato sotto viene mostrato brevemente (2-3 secondi) sullo schermo di un proiettore e poi si chiede ai bambini "disegnate ciò che avete visto".



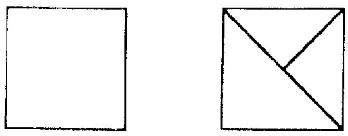
Agli studenti che ne hanno bisogno si mostra l'immagine una seconda volta.
In seguito si mostra il disegno e l'insegnante chiede: "Che cosa vedi e come lo hai disegnato?" I bambini hanno risposto, una stanza, un aquilone, una barca, una piramide tagliata, un grande quadrato con dentro un piccolo quadrato uniti da una linea. Gli studenti spesso vedono la figura in modi nuovi dopo aver udito l'interpretazione di qualcun altro. Come insegnante è importante mostrare un genuino interesse per le descrizioni dei bambini, ponendo domande di chiarimento.
Questa attività incoraggia gli studenti a costruire images mentali, ad usare quella parte del cervello che elabora ed utilizza images. Più la matematica scolastica ha carattere sequenziale e lineare, più è possibile che i bambini non utilizzino l'imaging secondo le loro possibilità.
Attività come il mostrare rapidamente sono utili nell'incoraggiare i bambini ad usare altri modi di pensiero. Poiché i disegni sono in vista quando i bambini stanno riproducendoli, essi devono ricavarli da un'immagine costruita. Il costrutto è ripresentato. Alcuni hanno detto "Io l'ho visto in tre dimensioni ma è stato più facile disegnarlo quando l'ho ripensato come piatto".

Oltre ai benefici dello sviluppo dell'imagery, il "mostrare rapidamente" fornisce un'opportunità per negoziare norme sociali ed il significato della matematica. Una persona interpreta il compito in un modo che abbia senso. Non c'è una singola risposta corretta. Si dà valore alle idee degli studenti e si incoraggia la comunicazione. Si offrono opportunità nell'utilizzo del linguaggio matematico e l'insegnante può introdurre, se è opportuno, i nomi standard delle figure geometriche, per esempio rombo invece di diamante.

Un'altra attività che si è rivelata molto potente nell'incoraggiare l'imaging è quella di mostrare un schieramento ordinato di punti sullo schermo del proiettore per pochi secondi e quindi nasconderlo; si chiede poi agli studenti quanti punti hanno visto e si offre loro la possibilità di spiegare come li hanno visti. Mostrando lo schieramento ordinato per poco tempo, gli studenti non riescono a contare per uno e sono incoraggiati a costruire un'image dello schieramento. Questo aiuta i bambini a formare l'intenzione della partizione e dell'organizzazione in schemi regolari piuttosto che a contare. Per esempio, quando abbiamo mostrato uno schieramento di 3x5 punti, gli studenti lo hanno descritto come tre volte cinque, cinque volte tre, dieci e cinque, nove e sei (suddividendo lo schieramento in 3 per 3 per 2 schieramenti). Ovviamente questo compito rappresenta una ricca potenzialità per la formazione di schemi moltiplicativi. Quando questa attività viene ripetuta nei giorni seguenti, il nascondere parte degli schieramenti in modo da scoraggiare il conteggio per uno può aumentare la plausibilità che gli studenti costruiscano immagini utili nella concettualizzazione della moltiplicazione.

Verifica dell'imaging

Un eccellente indicazione dell'uso dell'imaging da parte del bambino può essere ricavata dall'uso dell'"attività del Tangram", come descritto in Wheatley e Cobb (1991).



Vengono presentati una forma quadrata ed i pezzi del tangram; viene mostrato brevemente lo schema secondo il quale disporre pezzi del tangram nella forma. Se il bambino non riesce a sistemare i pezzi sul quadrato, lo schema viene mostrato di nuovo. In alcuni casi il bambino ha bisogno di tenere di fronte a sé lo schema per riuscire a sistemare i pezzi. Alcuni bambini evidentemente non riescono a costruire un'image della figura assegnata: scelgono pezzi che non si trovano nella figura oppure dispongono i pezzi a caso sulla figura. Altri bambini guardano intensamente la figura, spesso oscillano il capo e dicono “Sì” e quindi procedono a scegliere ed a disporre i pezzi come in figura. Quando la figura contiene tutti e sette i pezzi, i bambini spesso mettono a posto alcuni pezzi e poi chiedono di vedere un’altra volta la figura. In questo caso io deduco che essi hanno costruito un’image soltanto di parte della figura mostrata. In altri casi il bambino esita, guarda in giro e quindi procede. In tali situazioni essi possono essere in una fase di ripresentazione dell’image originale.

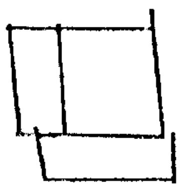
Spesso si ottiene evidenza di trasformazione delle images. Per esempio, quando il bambino osserva i pezzi del tangram per disporli sulla forma, egli può identificarli anche qualora non siano orientati come in figura. Si sono osservati bambini che giravano il pezzo quando lo mettevano in posizione – trasformando ovviamente la loro image. Ho eseguito interviste di bambini mentre facevano questa attività con una varietà di figure ed essa si è rivelata come uno strumento forte per predire le costruzioni numeriche del bambino: un bambino che ha difficoltà con questa attività difficilmente usa strategie di pensiero del tipo 5+7 è 12 perché 6+6 è 12. Notiamo che l’utilizzo di questa strategia di compensazione per l’addizione suggerisce una costruzione dinamica delle images del numero (1 è mosso da 7 a 5 per fare 6, la combinazione numerica conosciuta).

Il 27 marzo 1995 ho intervistato Sara, una bambina di terza. Aveva facilmente formato un’image mentale dello schema mostrato e praticamente senza esitazione aveva disposto in maniera appropriata i pezzi. La sue costruzioni numeriche erano bene sviluppate. Aveva costruito la decina come unità iterabile ed aveva usato una strategia di compensazione per sommare mentalmente 16+14. Aveva sommato mentalmente, con sicurezza, anche 328+132 (scritti in orizzontale).

In contrasto Josh, intervistato la stessa mattina, aveva difficoltà con il compito del Tangram; in alcuni casi non riusciva a disporre i pezzi senza avere di fronte a sé lo schema. In corrispondenza, la sua aritmetica era primitiva e basata sul contare. Gli ho mostrato una pila di monete gialle e rosse e lui le ha contate fino a 20. Gli ho chiesto quante erano le monete rosse e lui le ha contate ed ha trovato che erano 8. Quindi gli ho detto “Le monete sono in tutto 20, è vero? Quante sono le monete gialle?”. Dopo un po’ ha risposto 12, dicendo di averle contate. In risposta alla domanda “quanto fa 19 + 11?” ha risposto 30. Quando gli ho chiesto in che modo ha ottenuto 30, ha risposto di avere contato. Josh non possiede un modo di valutare quanto è una collezione senza contare. Gli ho chiesto quanto resta se a 30 tolgo 18; mi ha risposto 23. Non sembra avere alcuna immagine di 30 né possedere la relazione fra 30 e 18.

Come è risultato in quasi tutte le interviste di questo tipo che io ho condotto, vi è una simile corrispondenza tra la qualità dell’attività del bambino nel compito del tangram e la sofisticazione nelle sue costruzioni numeriche. Friedman (1995) afferma che la relazione tra abilità spaziale ed acquisizioni matematica è al più debole; la sua analisi è fondata su una meta analisi di studi

correlazionali che fanno uso di una varietà di definizioni di “abilità” spaziali e di acquisizione matematica.. Usando il Test di Abilità Spaziale di Wheatley, un test sulle rotazioni mentali, assieme ad un test di matematica significativa, abbiamo consistentemente trovato una forte correlazione tra l’uso delle images e la risoluzione dei problemi in matematica. Come corollari di questi studi sono state condotte più di 100 interviste cliniche con studenti, esaminando la relazione tra l’uso delle images ed il livello delle conoscenze matematiche. In quasi tutti i casi è stata osservata una forte correlazione tra il successo nelle attività sul tangram e la sofisticazione nelle strategie additive e sottrattive.
Bisogna prestare attenzione nel ricavare le abilità di imaging dai disegni del bambino. I bambini non sempre sono in grado di disegnare ciò che immaginano. Nel marzo del 1998 Michael ha descritto in maniera corretta i cubi in un arrangiamento 3x3 quando vengono tagliati utilizzando un piano che passa attraverso vertici disposti sulle diagonali e perpendicolare al piano della faccia superiore. Egli aveva costruito un’immagine di questo cubo composto ed aveva notato che mediante questo taglio venivano a formarsi prismi triangolari (parole sue). Tuttavia quando ha tentato di disegnare il prisma rettangolare egli ha fatto il disegno della figura.



Non era soddisfatto del suo disegno ma non è stato in grado di migliorarlo. In una precedente occasione aveva tentato di disegnare il grafico di $y = 0{,}3x^2 + 3$ in contrasto con quello di $y = 3x^2+3$. Per quanto tentasse egli non è stato in grado di ottenere che la curva si appaiattisca e rimanga vicina al punto più basso piuttosto che arrotondarsi come una parabola.

Riassunto

In aggiunta al linguaggio, le images costruite dalla mente giocano un ruolo importante nel ragionamento matematico. I ragionamenti non sono di natura proposizionale; si ragiona piuttosto usando schemi di images.
Vengono definiti 3 aspetti dell’imaging: la costruzione, la ri-presentazione, la trasformazione delle images. E’ stato dimostrato che questi costrutti sono utili nell’interpretazione dell’attività matematica del bambino. In questo articolo è stata analizzata la relazione tra l’uso delle images e l’attività matematica nel bambino. Quando l’attività matematica viene studiata attraverso interviste

cliniche, si trova che l'imaging gioca un ruolo importante. Bisogna osservare che l'attività matematica viene considerata l'insieme di schemi e relazioni costruite da un individuo piuttosto che fatti e procedure – questo fatto viene riferito da Skemp (1976) come comprensione relazionale piuttosto che strumentale e da Brown e Wheatley (1990) come matematica significativa.
L'imaging gioca un ruolo essenziale sia nel ragionamento numerico che in quello geometrico (Wheatley e Reynolds, 1996). Vi è evidenza che le strategie di pensiero utilizzate dai bambini nel sommare e sottrarre sono spesso basate su images. Michael, un bambino di 7 anni, si è formato l'immagine di una parabola come interrelazione dinamica tra due variabili che ha usato per formulare e risolvere questioni matematiche. Dopo aver lavorato per quindici mesi con Michael, il grado con il quale egli usava l'imaging nella sua attività matematica era sorprendente. Questo non significa che egli usasse esclusivamente images nel ragionamento matematico. Egli era in possesso di una potente memoria e costruiva procedure che usava senza bisogno di imaging. Tuttavia le procedure erano state costruite significativamente in modo tale che potessero essere ricomposte quando necessarie per risolvere un problema. Con "ricomporre" io intendo il ripresentare gli schemi e le relazioni mediante i quali le procedure erano state costruite.
Infine si è osservato che il coinvolgimento in specifiche attività può aumentare la possibilità che il potere dell'imaging venga richiamato quando si fa matematica. È stato mostrato che attività come gli oggetti nascosti, il rapido mostrare, il tangram e altre che incoraggiano la formazione di images mentali, hanno un ruolo importante nel rendere la matematica significativa.
La controversia sull'uso del ragionamento non proposizionale ha ricevuto impulso grazie agli studi che calcolavano le correlazioni tra i risultati dei test. Sono stati approntati numerosi strumenti per misurare l'"abilità spaziale" ma questo approccio a scatola chiusa al funzionamento della mente ha portato molti ricercatori a concludere che non c'è relazione tra "abilità spaziale" e "apprendimento matematico". La conclusione ottenuta mediante questa linea di ricerca è stata che l'abilità spaziale non ha un ruolo significativo nell'attività matematica. Tuttavia risultati di interviste cliniche, testimonianze personali (Sfard, 1994) ed introspezione hanno fornito l'evidenza che molta attività matematica è fondata sull'imaging.

Bibliografia

Brown, D.L., *An investigation of imagery and mathematical understanding in elementary school children,* Unpublished masters thesis, Florida State University, 1993.

Brown, D.L., Wheatley, G.H., "Relationship between spatial ability and mathematics knowledge", in P*roceedings of the annual meeting physiology of mathematics education-NA,* New Brunswick, NJ, 1989, pp.143-148.

— "The role of imagery in mathematics reasoning", in *Proceedings of the fourteenth annual meeting international group for psychology of mathematics education conference,* Mexico, 1990, pp. 217-224.

— "Assessing spatial visualization: evidence for transformed images", in *Proceedings of the fifteenth annual meeting international group for the psychology of mathematics education,* Assisi, Italy, 1991.

Cobb, P, Wheatley, G.H., "Children's initial understandings of ten.", in *Focus on learning problem in mathematics,* 10, 1988, pp. 1-28.

Dorfler, W., "Meaning: image schemata and protocols", in *Proceedings of the fifteenth annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education,* Assisi, Italy, 1991, pp. 17-34.

Friedman, L., "The spatial factor in mathematics: gender differences", in *Review of Educational Research,* 65, 1, 1995, pp. 22-50.

Johnson, M., *The body in the mind. The bodily basis of meaning, imagination, and reason,* Chícago, The University of Chicago Press, 1987.

Lakoff, G., *Women, fire and dangerous things: what categories reveal about the mind,* Chicago, The University of Chicago Press, 1987.

Montague, P., Gancayco, C., Winn, M., Marchase, R., Friedlander, M., "Role of NO production in NMDA receptor-mediated neurotransmitter release in cerebral cortex", in *Science,* 263, 1994, pp. 973-967.

National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics,* Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

Piaget, J., *On the development of memory and identity,* Barre, MA, Clark University Press and Barre Publishers, 1968.

Reynolds, A., *Imaging in children mathematica1 activity,* Unpublished doctoral dissertation, Florida State University, 1993.

Reynolds, A., Wheatley, G.H., “The elaboration of images in the process of mathematics meaning making”, in *Proceedings of the Sixteenth Mathematical Group for Psychology of Mathematics Education Conference,* 242-2-249, Durharn, NH, 1992.

Sfard, A., “Reification as the birth of metaphor”, in *For the learning of mathematics,* 14, 1, 1994, pp. 44-55.

Skemp, R., “Relational and instrumental understanding”, in *Mathematics Teaching,* 17, 1976.

Wheatley, G.H., *The Wheatley Spatial Ability Test,* West Lafayette, IN, Purdue University, 1978.

— “Spatial sense and mathematics learning”, in *Arithmetic Teacher*, 37, 6, 1990, pp. 10-11.

— *Quick draw: developing spatial sense in mathematics,* Tallabassee, FL, Mathematics Learning,1996.

Wheatley, G.H., Brown, D., “The construction and re-presentation of images in mathematical activity: image as metaphor”, in E*ighteenth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Lisbon, Portugal, 1994.

Wheatley, G.H., Brown, D., Solano, A., “Long term relationship between spatial ability and mathematical knowledge”, in *Ilie North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education,* Baton Rouge, LA, 1994.

Wheatley, G.H., Cobb, P., “Analysis of young children's spatial constructions.”, in *International perspectives on transforming early chi1dhood mathematics education,* L. Steffe (Ed.) Hillsdale, Lawrence Erlbaurn Press, 1991.

Wheatley, G.H., Reynolds, A., “The construction of abstract geometric and numerical units”, in *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the Psyycho1ogv of Mathematics Education,* R, Underhill (Ed.), Blacksburg, VA, 1991.

— “The construction of abstract units in geometric and numeric settings” in *Educational studies in mathematics,* 30, 1996, pp.67-83.

Yackel, E., Wheatley, G.H., “Promoting visual imagery in young children”, in *Arithmetic Teacher,* 37, 6, 1990, pp. 52-58.

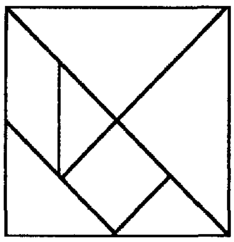
TANGRAM PER I PIÙ PICCOLI

di **Daniel Djament**

Traduzione da:

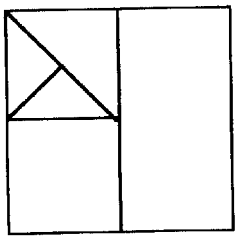
“Des Tangrams pour les tout petits”, in Bulletin APMEP n°423 - Septembre - Octobre 1999, pp. 421-424.

Il tangram classico è difficile per i bambini di cinque o sei anni per due motivi: contiene sette pezzi, cioè troppi, e, soprattutto, uno dei pezzi (il parallelogramma non rettangolo), che non possiede assi di riflessione, deve talvolta essere ribaltato.

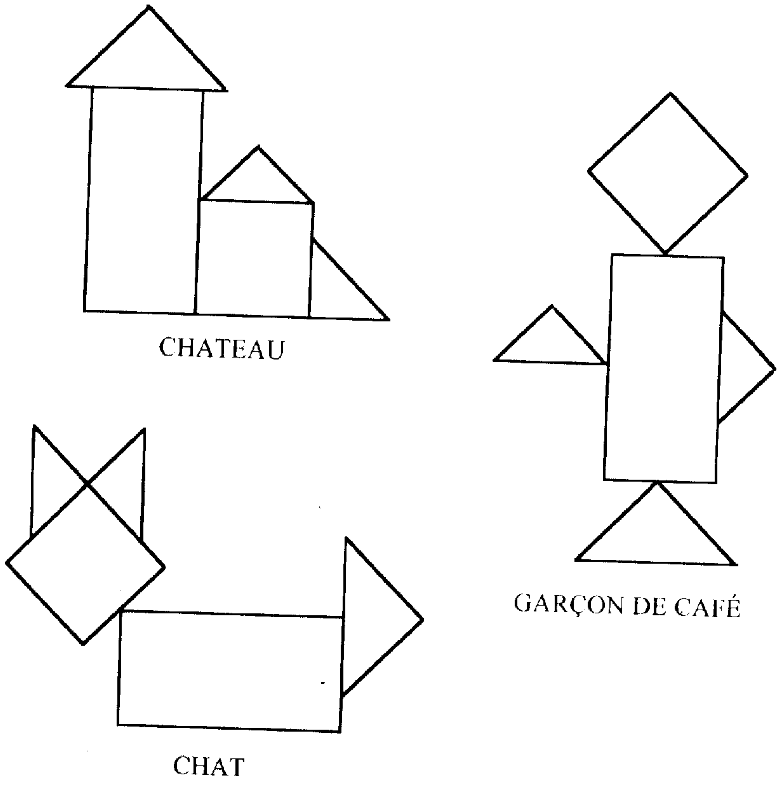


In tal modo, dopo parecchi anni ho messo a punto, con l’aiuto prezioso dei miei studenti e degli stagisti della formazione continua dello IULM di Livry-Gargan, una progressione verso il tangram classico per il ciclo degli apprendimenti primari. Essa è costituita da due tangram.

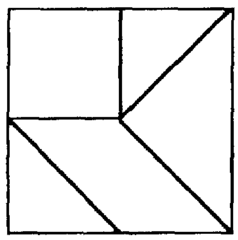
Il primo non ha che cinque pezzi che possiedono un asse di riflessione ortogonale, dunque invarianti nella riflessione.



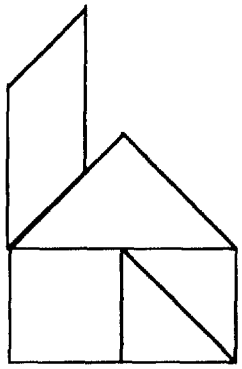
Questo tangram permette di realizzare tra l'altro le seguenti figure:



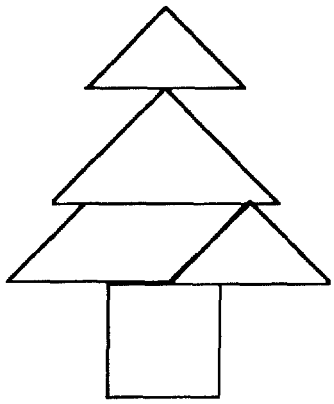
Il secondo tangram possiede anch'esso cinque pezzi ma uno di essi non ha assi di riflessione ortogonale.



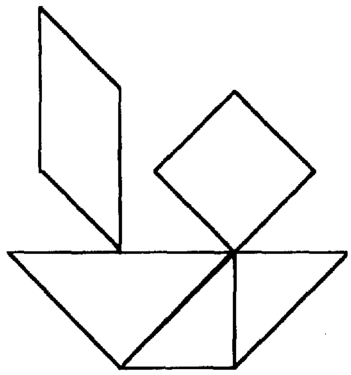
Ecco alcune figure che si possono costruire:



MAISON



SAPIN



BATEAU

Dopo questo inizio è possibile presentare a bambini molto piccoli il tangram classico. Le esperienze effettuate nelle classi mostrano che questa progressione è stata efficace.
Ci si può chiedere certamente se per un bambino di cinque o sei anni questi tangram hanno un reale interesse pedagogico e se questa attività è o no da classificare nelle attività di matematica.
L'obiettivo, che io qualifico di pre-matematica, è quello di evitare che si installino nelle menti dei bambini degli stereotipi che legano le proprietà delle figure alla loro disposizione.
In particolare si tratta di condurre il bambino, attraverso la manipolazione di figure classiche, a percepire perpendicolarità e parallelismi – anche senza pronunciare ancora queste parole – nelle disposizioni non convenzionali. Negli esercizi dei mosaici i triangoli non hanno sempre la punta in alto, e gli angoli retti non sempre hanno i lati paralleli ai bordi del foglio…
È necessario girare la figura che si ha in mano per disporla correttamente e, nell'esercizio seguente la stessa figura dovrà essere orientata in maniera diversa. È in questo senso, per me, che i tangram hanno interesse in tutti gli apprendimenti primari. Aggiungiamo, per concludere, che il mostrare che ci si può divertire con delle figure geometriche e che si può utilizzarle per fare dei bei disegni può contribuire a rendere la matematica attraente, cosa che non è evidente a tutti.

COSTRUIRE ED ESPLORARE IL TANGRAM

di Andrejs Dunkels

Traduzione da:

"Making and exploring Tangrams", in Arithmetic Teacher 27, 6 (1990), pp. 38-42.

I tangram esistono da molto tempo. Molti di noi li hanno usati per stimolare la percezione delle forme da parte dei nostri studenti. L'approccio più diffuso sembra essere l'uso dei cartoni prodotti commercialmente o di set di tangram di plastica o, in alternativa, una sagoma dalla quale gli alunni ritagliano i pezzi. A volte i pezzi vanno numerati da 1 a 7 come riferimento.

Questo articolo riporta la mia esperienza con alunni che creano i loro tangram. L'attività offre agli alunni una ricca esperienza nella percezione spaziale e geometrica.

Ho evitato i set di tangram già pronti e ho usato i nomi propri della figure piuttosto del numero, quando parlavo di esse. Nel produrre tangram gli alunni hanno avuto l'opportunità di discutere gli aspetti spaziali percepiti: dimensione, forma, somiglianze e differenze.

Questo approccio, rispetto allo standard, si focalizza di più sulla geometria. Prima di iniziare le lezioni con i tangram, la classe ha fatto alcuni pieghevoli con quadrati e rettangoli. Gli alunni hanno perciò sperimentato il fatto che un quadrato può essere piegato e poi tagliato a metà in una varietà di modi. Così hanno trovato che la metà di un quadrato più la metà di un quadrato non sempre fa un quadrato. Essi hanno provato a tagliare il quadrato più grande possibile da in foglio (1a) di carta rettangolare. La mia prima lezione di tangram comincia, infatti, con un ripasso di questa procedura, come mostrato nelle figure 1a-d.

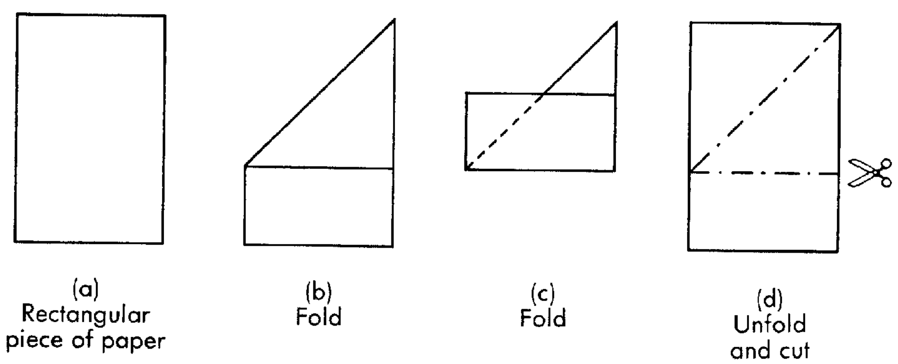


Figura 1: costruisci un quadrato da un rettangolo

In passato avevo evitato che gli alunni tagliassero con le forbici lungo le pieghe dei fogli, a causa della precisione richiesta dai pezzi del tangram. Ora mi sono invece reso conto che le forbici sono adatte per tagliare lungo le pieghe del foglio e che le imperfezioni fanno parte di ogni attività pratica.

Riportiamo la nostra attenzione sul quadrato. Normalmente agli alunni di 5/6 anni io do un foglio quadrato piuttosto che rettangolare. Tagliamo il quadrato lungo la piega diagonale e così otteniamo due metà del quadrato (figura 2).

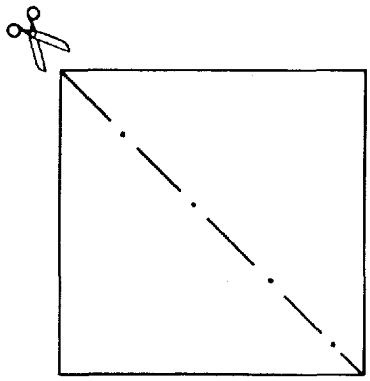


Figura 2: il quadrato viene tagliato a metà lungo la diagonale

Come chiamiamo tali forme? (Triangoli). Esse possono essere unite in una varietà di modi producendo altre forme. Conosci i nomi di queste forme? (vedi figura 3)

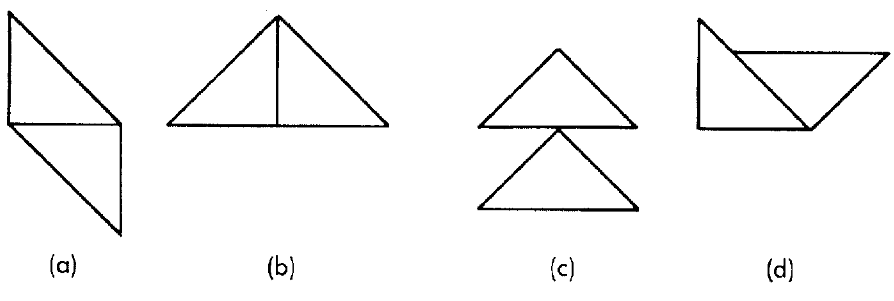


Figura 3: metà quadrato più metà quadrato non sempre fanno un quadrato
[(a) parallelogramma (b) triangolo (c) nessun nome specifico (d) pentagono].

Se mettiamo una metà triangolare del quadrato sopra l'altra, otteniamo una sovrapposizione perfetta, naturalmente rispetto alla precisione degli strumenti usati.
Mettiamo ora da parte uno dei triangoli, pieghiamo l'altro a metà e tagliamo lungo la linea tratteggiata (come in figura 4).

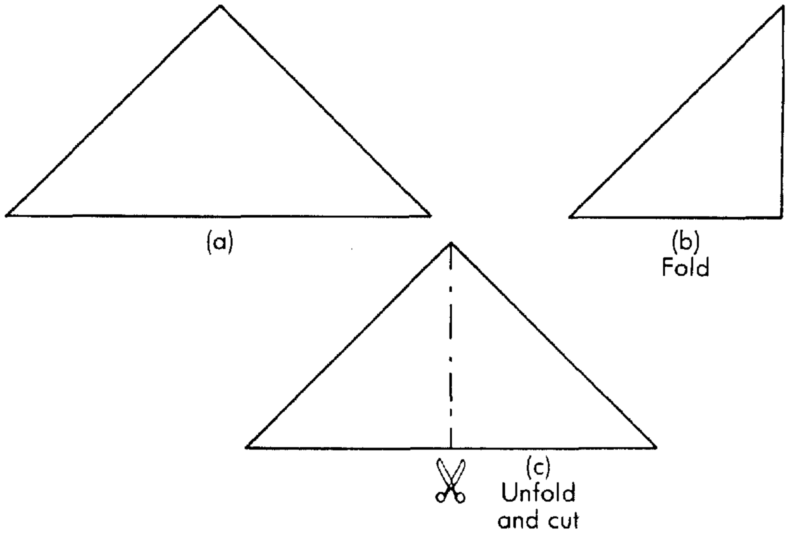


Figura 4: il triangolo grande è tagliato in due triangoli uguali

Facendo così otteniamo due nuovi pezzi. Di che forma sono? (Triangoli). Cosa possiamo dire a proposito delle loro dimensioni? Possono essere messi assieme in modi diversi oltre che lungo l'ultimo taglio?

Confronta i nostri nuovi triangoli con quello più grande. Possiamo metterli insieme e sollevarli in controluce. La figura 5 mostra il risultato. Nella figura 5a notiamo che il triangolo è realmente la metà del più grande. Perciò la fetta più chiara nella figura 5b deve essere pure la metà del triangolo più grande. La relazione è interessante perché rappresenta una sfida a ciò che appare a prima vista. Che cosa sai dire circa la dimensione della parte chiara in figura 5c?

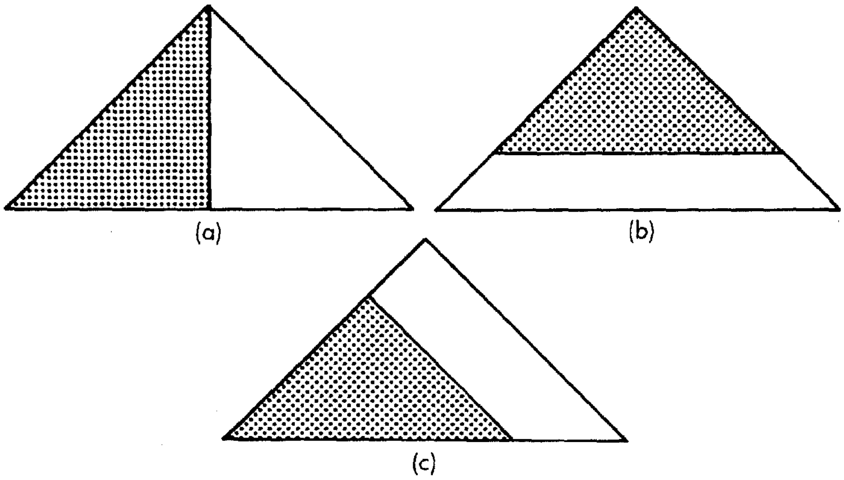


Figura 5: il triangolo piccolo è la metà del triangolo grande

Per gli alunni è l'occasione di scoprire e discutere molte proprietà e relazioni. L'obiettivo è di parlare di matematica e non solo di trovare la risposta. È matematica da esplorare per il piacere di un'esperienza intellettuale ed estetica.

La figura 6 mostra un modo di disporre i triangoli piccoli e di vederli in controluce. Molti bambini chiamano questa disposizione "la volpe" o "il cane".

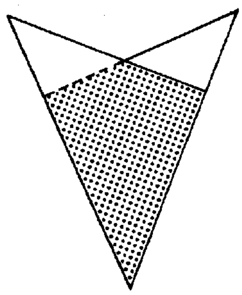


Figura 6: "la volpe" o "il cane"

A questo punto abbiamo tre pezzi, due triangoli piccoli (alla fine saranno fatti triangoli ancora più piccoli) ed un triangolo grande, tutti della stessa forma. Mettiamo da parte quelli piccoli e continuiamo con quello grande. La prossima piega necessita di una speciale attenzione. Lo scopo della piega è di segnare la metà del lato più lungo del triangolo e deve essere fatta in maniera tale che la piega non si estenda per tutto il triangolo (vedi fig. 7).

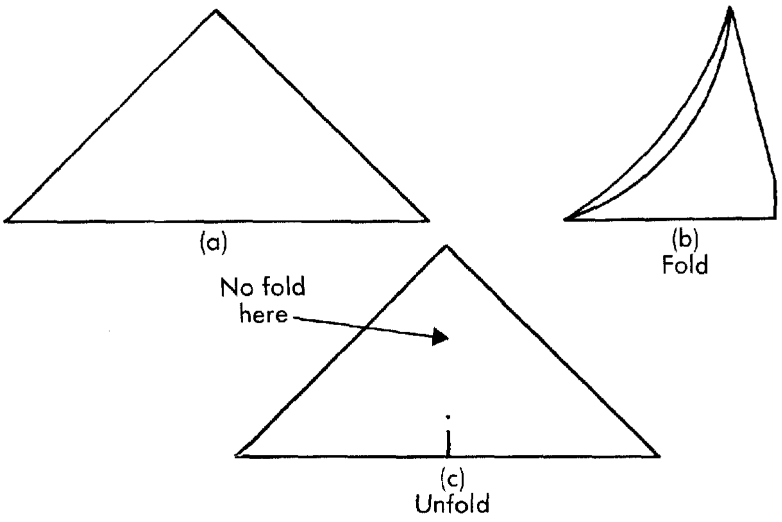


Figura 7: piegare il triangolo proprio per segnare il punto medio della base

Il punto medio serve per la prossima piega. Si fa coincidere il vertice opposto al punto medio con il punto medio stesso, quindi si piega, si dispiega e si taglia come mostrato in figura 8.

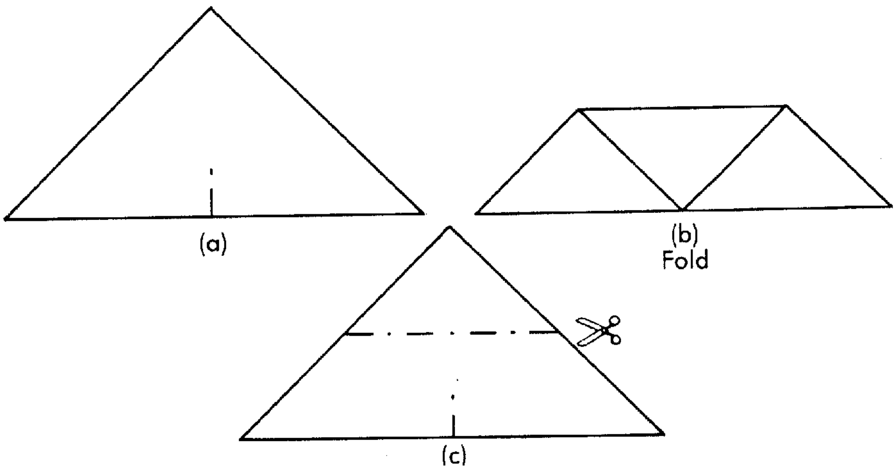


Figura 8: il punto medio rende possibile una piegatura parallela alla base

Il triangolo che viene tagliato deve essere confrontato nello stesso modo di prima con gli altri triangoli ed anche con la striscia o trapezio restante. Durante tutta la procedura di piegatura e taglio usiamo molti termini geometrici per descrivere le nostre azioni e le forme risultanti. Non vi è necessità di alcuna numerazione dei pezzi che vengono prodotti. È vantaggioso parlare di essi sia usando i loro nomi che descrivendoli. In seguito mettiamo da parte i nostri tre triangoli. Si noti che i

triangoli che precedentemente avevamo definito piccoli saranno ora chiamati triangoli grandi. Il passaggio avviene più o meno inconsciamente.
Continuiamo a tagliare il quarto pezzo (il trapezio). Si porti uno dei vertici sul punto medio (come mostrato in figura 9), così da produrre un nuovo triangolo.

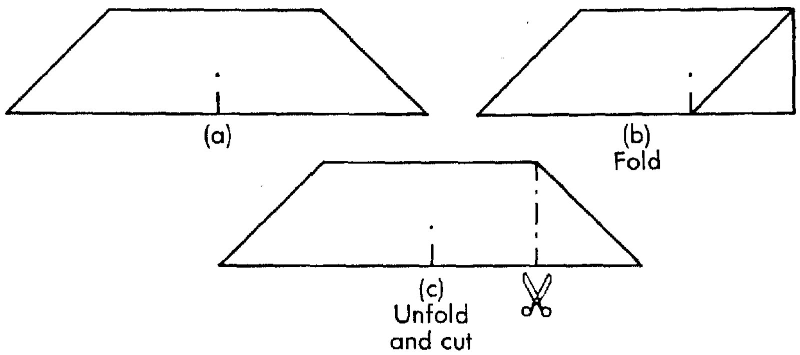


Figura 9: viene tagliato un triangolo piccolo

Alla fase esplorativa viene assegnato più tempo. Poiché tutti i triangoli che produciamo sono simili, otteniamo le stesse figure più volte. Esse differiscono solo in dimensione. Incontrarle è come imbattersi in vecchi amici.
Di seguito ritagliamo un quadrato (figura 10), che confrontiamo con ognuno dei pezzi prodotti precedentemente.

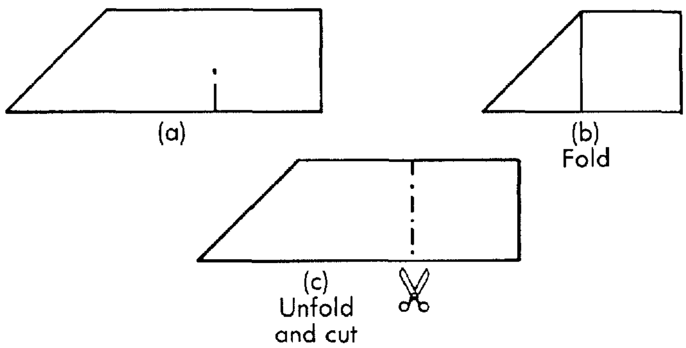


Figura 10: A questo punto è facile tagliare un quadrato

Come prima si esplorano e si discutono forme, dimensioni e figure. Le idee dei bambini vengono incoraggiate e verificate. Una ricerca fruttuosa comincia col fare i modo che l'angolo retto di ogni triangolo coincida con uno degli angoli retti del quadrato. Quando poniamo uno dei lati del quadrato

simmetricamente lungo il lato maggiore del triangolo grande, il quadrato sporge un po'. E se facciamo la stessa cosa con il triangolo medio vediamo che le altezze del triangolo e del quadrato sono le stesse. Il pezzo rimanente, che assomiglia ad un topo, è esattamente uguale al quadrato e al triangolo più piccolo. Il quadrato ed il triangolo medio hanno la stessa misura.
L'ultima piega è quella più eccitante e difficile. Per prima cosa identifichiamo i due vertici opposti indicati dalle frecce in figura 11. Poi afferriamo il trapezio con una mano in questi due vertici. Facciamo combaciare i due vertici come nelle figure 11b e 11c. Ne risulta un triangolo ed un parallelogramma. Ancora una volta concediamo tempo per confronti ed esplorazioni.
Alla fine tagliamo; abbiamo ottenuto così i nostri sette pezzi del tangram.

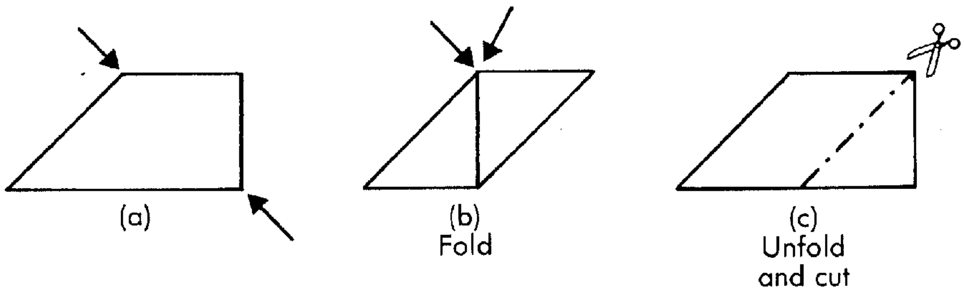


Figura 11: questa è la piegatura più difficile!

Naturalmente i bambini vorranno poi rimettere insieme i loro pezzi per formare il quadrato da cui siamo partiti (fig. 12).

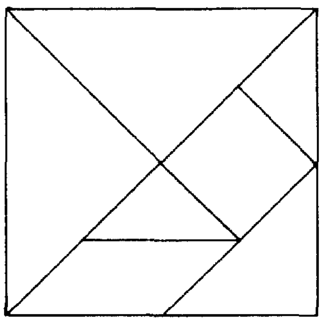


Figura 12: i pezzi vengono sistemati per formare il quadrato iniziale

L'insegnante non ha bisogno di proporre la questione; essa sorge abbastanza naturalmente. Nessuno discute la pertinenza del compito. Tutti si stupiscono e molti si divertono per il fatto che ricomporre il quadrato è molto più difficile di quanto ci si aspetti. La convinzione dei bambini che sia possibile rifare il quadrato è un preciso vantaggio per l'insegnante. Quando il quadrato è completo, io racconto agli alunni la storia dell'imperatore cinese Tan che fece cadere il suo specchio quadrato sul pavimento di pietra, un giorno di 3000 anni fa. Lo specchio si ruppe esattamente nei sette pezzi che noi abbiamo ritagliato. Tan li usò per gioco formando tutti i tipi di figure. Le regole di Tan furono che tutti i pezzi devono essere utilizzati e che non è consentita sovrapposizione. Ai bambini viene dato il tempo per il gioco libero e l'esplorazione con il loro set di tangram. Non viene dato loro alcun esempio da copiare o contorni di figure da fare. Hanno l'opportunità di creare essi stessi senza la limitazione che gli esempi tendono ad introdurre. Più tardi, molto più tardi, l'insegnante ha l'opportunità di usare esempi, figure, forse tangram di plastica e tutto il resto, se lo desidera.

Un grande vantaggio nel piegare e ritagliare i tangram è che la classe può produrre set di tangram di differenti dimensioni. I bambini possono poi costruire figure con i pezzi del tangram, ad esempio, un uomo, un cane formato da pezzi piccoli ed un uccello formato da pezzi ancora più piccoli (fig.13). Tutte queste figure possono poi essere incollate su un foglio di carta e colorate con gli acquarelli. Così gli alunni possono fare la loro mostra di tangram.

Dopo attività come quelle descritte nell'articolo, l'insegnante potrebbe ritenere necessari un set di tangram di plastica. Persino libri che dimostrano esempi saranno spesso superflui; per lo meno non necessitano di essere introdotti nell'immediato. I bambini producono abbastanza esempi loro stessi e possono essere sufficientemente sfidati dai loro compagni di classe piuttosto che da libri o schede di lavoro.

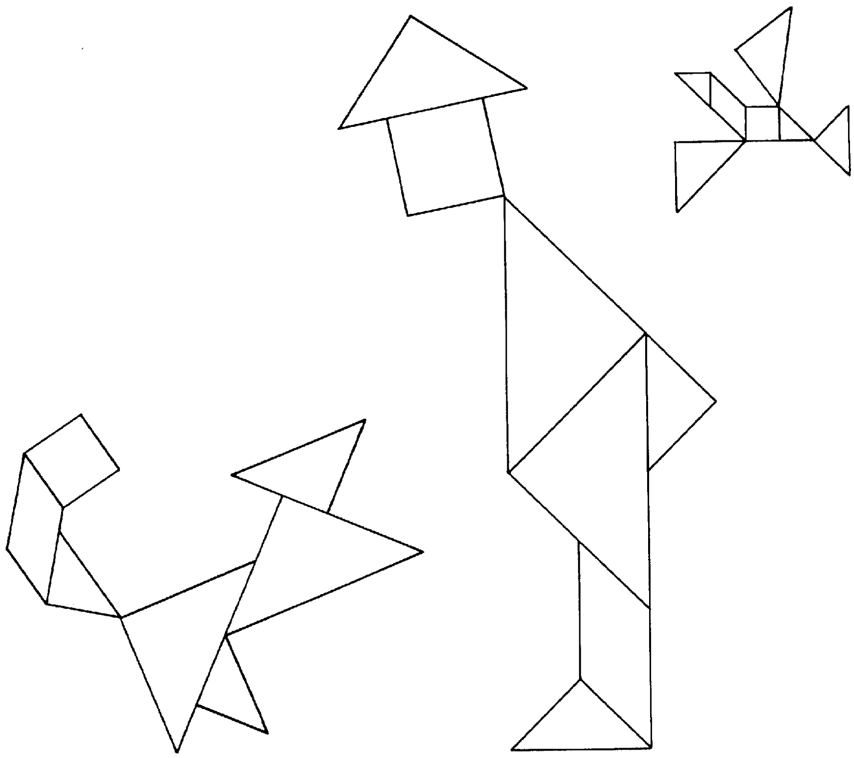


Figura 13: i bambini possono costruire forme con i pezzi presi da quadrati di dimensioni diverse

Bibliografia

Bolster, L. Carey, Maletsky, Evan M., "Activities: Tangram Geometry", in *Mathematics Teacher,* 70 (Marzo 1977), pp. 239-42.

– "Activities : Tangram Mathematics", in *Mathematics Teacher,* 70 (February 1977), pp. 143-45.

Dickoff, Steven S., "Paper Folding and Cutting a Set of Tangram Pieces", in *Arithmetic Teacher,* 18 (April 1971), pp. 250-52.

Russell, Dorothy S., Bologna, Elaine M., "Teaching Geometry with Tangrams", in *Arithmetic Teacher,* 30 (October 1982), pp. 34-38.

SVILUPPARE IL PENSIERO GEOMETRICO ATTRAVERSO ATTIVITÀ CHE COMINCIANO CON IL GIOCO

di **Pierre M. van Hiele**

Traduzione da:

"Developing geometric thinking through activities that begin with play", in *Teaching children mathematics,* febbraio 1999, pp. 310-316.

Per i bambini la geometria inizia con il gioco. Un insegnamento della geometria ricco e stimolante può avvenire attraverso attività piacevoli come mosaici, blocchi, tassellature, con puzzle come il tangram o speciali mosaici come quello in figura 1.
Gli insegnanti si possono domandare come i bambini possano usare i mosaici e quale geometria imparino. Prima di rispondere a queste domande e di esplorare il potenziale del mosaico nell'insegnamento della geometria, vorrei evidenziare alcuni "misconcetti" nell'insegnamento della matematica ed alcune mie idee sui livelli del pensiero geometrico.

"Misconcetti" nell'insegnamento della matematica

L'insegnamento della matematica nelle scuole – geometria e aritmetica – è stato sorgente di molti misconcetti.
La geometria nella scuola secondaria è stata basata per lungo tempo sulla geometria formale assiomatica che Euclide ha creato più di 2000 anni fa. La sua struttura logica di geometria, con assiomi, definizioni, teoremi e dimostrazioni, è stata, per il suo tempo, una straordinaria conquista scientifica. La geometria scolastica, che viene presentata in maniera simile, presuppone che gli studenti pensino a livello di pensiero deduttivo formale. Tuttavia questo non è di solito vero ed essi sono privi dei prerequisiti che permettono di comprendere la geometria. Questa mancanza crea un varco tra il loro livello di pensiero e quello richiesto per quel tipo di geometria che ci si aspetta che imparino.
Un misconcetto simile lo si ritrova nell'insegnamento dell'aritmetica alle elementari. Come è stato fatto da Euclide in geometria, i matematici hanno sviluppato costruzioni assiomatiche per l'aritmetica, che in seguito hanno influenzato l'insegnamento dell'aritmetica nelle scuole. Nel 1950 Piaget ed io ci siamo mossi contro questo misconcetto. Tuttavia non abbiamo avuto successo perché proprio allora la teoria degli insiemi fu posta a fondamento del numero e l'aritmetica fondata sugli

insiemi si diffuse in tutto il mondo grazie alla cosiddetta "New Maths". Per molti anni questo misconcetto ha dominato la matematica scolastica ed è cessato solo dopo che furono riportati i risultati negativi. Il punto di vista di Piaget, che io condivido, era che "piuttosto che dare un insegnamento al tempo sbagliato è meglio non darlo". Dobbiamo fornire un insegnamento che sia adeguato al livello di pensiero dei bambini.

I livelli del pensiero geometrico

A quale livello deve incominciare l'insegnamento? La risposta dipende naturalmente dal livello di pensiero dello studente.

Comincio a spiegare cosa intendo per livello di pensiero raccontando la conversazione che due dei miei figli, all'età di otto e nove anni, hanno avuto riguardo al pensare. La domanda era: "Se sei sveglio, sei occupato a pensare?" "No, dice uno, io posso camminare nel bosco e vedere gli alberi e tutte le altre cose belle ma non pensare agli alberi. Vedo felci e lo vedo senza pensare…" L'altro risponde: "Allora tu stavi pensando, tu sapevi che eri nel bosco e quindi vedevi gli alberi, ma non usavi parole".

Ho fatto da giudice in questa importante controversia ed ho chiesto l'opinione di Freudenthal, un importante matematico ed educatore olandese. La sua opinione è stata chiara: pensare senza parole non è pensare. In "Discernimento e pensiero" (van Hiele 1986) ho espresso questo punto di vista e gli psicologi statunitensi si sono detti in disaccordo. Essi avevano ragione: se il pensiero non verbale non appartiene al pensiero reale, allora anche se siamo svegli non pensiamo per la maggior parte del tempo. Il pensiero non verbale è di importanza speciale: tutto il pensiero razionale ha le sue radici nel pensiero non verbale e molte decisioni vengono prese solo con questo tipo di pensiero. Osserviamo molte cose senza avere parole per esse. Riconosciamo le facce di persone familiari senza essere capaci di usare parole per descriverle.

Nei miei livelli di pensiero geometrico, il più basso livello è il **livello visivo**, che comincia con il pensiero non verbale. A livello di pensiero visivo le figure sono giudicate nella loro apparenza. Diciamo "è un quadrato. So che lo è perché vedo che lo è". Il bambino può dire "è un rettangolo perché sembra una scatola".

Al livello successivo, **il livello descrittivo**, le figure sono portatrici delle loro proprietà. Una figura non è più giudicata perché "sembra così", ma piuttosto perché ha certe proprietà. Per esempio un triangolo equilatero ha queste proprietà: tre lati, tutti i lati uguali, tre angoli uguali, simmetrie in rotazioni e in riflessioni. A questo livello il linguaggio è importante per descrivere le forme. Tuttavia al livello descrittivo le proprietà non sono ordinate logicamente ed in tal modo un triangolo con lati uguali non ha necessariamente angoli uguali.

Al livello successivo, **il livello deduttivo informale**, le proprietà sono ordinate logicamente. Sono dedotte da altre; una proprietà precede o segue un'altra. Gli studenti usano le proprietà che già conoscono per formulare definizioni, per esempio di quadrati, di rettangoli, di triangoli equilateri e le usano per giustificare relazioni: come spiegare perché tutti i quadrati sono rettangoli o perché la somma degli angoli di un triangolo è 180°. Tuttavia a questo livello il significato intrinseco della deduzione, cioè il ruolo di assiomi, definizioni, teoremi e loro inversi, non viene compreso. La mia esperienza di insegnante mi convince che molto spesso gli studenti non hanno raggiunto questo livello **di deduzione formale**. Di conseguenza non possono avere successo nei loro studi del tipo di geometria creato da Euclide che coinvolge la deduzione formale. Vedere van Hiele, Fuys, Geddes e Tiscler per ulteriori informazioni sui livelli.

Come possono gli studenti sviluppare il pensiero? Io penso che lo sviluppo dipenda più dall'insegnamento che dall'età e dalla maturazione biologica e che i tipi di esperienze scolastiche favoriscano o impediscano lo sviluppo. Alla fine di questo articolo io sosterrò che l'insegnamento mirato a favorire lo sviluppo da un livello ad un altro dovrebbe includere successioni di attività, iniziando dalla fase esplorativa, costruendo gradualmente concetti e il linguaggio correlato e culminando in un'attività riassuntiva che aiuti gli studenti ad integrare quello che hanno imparato dentro quello che già conoscono.

Le seguenti attività illustrano questo tipo di sequenza per sviluppare il pensiero a livello visivo e favorire la transizione al livello descrittivo.

Iniziare la geometria con il mosaico

Unisciti a me nell'uso del mosaico a sette pezzi di figura 1, in una piacevole esplorazione che tratta con alcune forme e le loro proprietà, la simmetria, il parallelismo e l'area. Prima di continuare costruisci tu stesso i pezzi da usare durante le attività, che possono essere adattate ai bambini a seconda della loro esperienza geometrica.

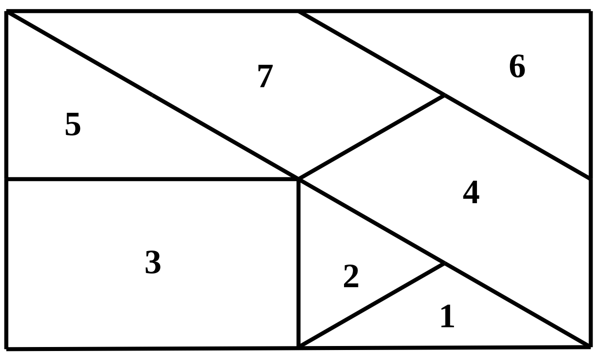


Figura 1: il mosaico a sette pezzi. Crea l'insieme dei pezzi da usare mentre leggi questo articolo

La figura 1 può essere riprodotta su cartoncino per costruire set duraturi per voi e per i bambini. I pezzi vengono numerati sul retro come riferimento durante le istruzioni e le discussioni dell'attività.
Immagina che il grande rettangolo di figura 1 sia stato suddiviso in sette pezzi: un triangolo isoscele (il pezzo 1); un triangolo equilatero (il pezzo 2); due triangoli rettangoli (i pezzi 5 e 6); tre quadrilateri che consistono di un rettangolo (il pezzo 3), un trapezio isoscele (il pezzo 4) ed un trapezio scaleno (il pezzo 7).
La figura 2 mostra come il rettangolo grande ed i suoi pezzi si adattino in una griglia di triangoli equilateri.

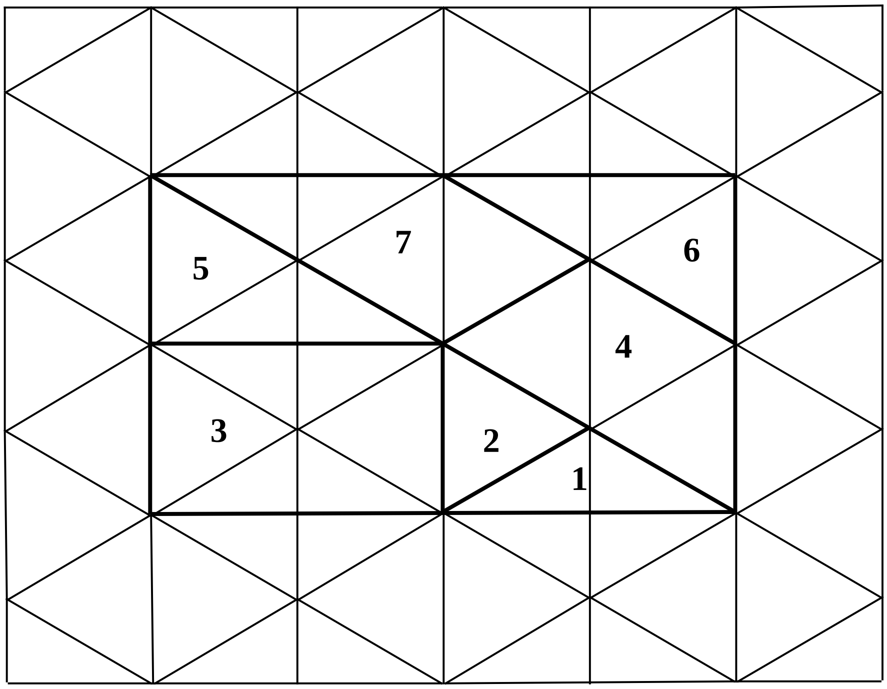


Figura 2: griglia triangolare regolare

Cominciamo con il chiedere "Che cosa possiamo fare con questi pezzi?". I bambini rispondono a questa domanda aperta usando le loro immaginazioni e giocando con i pezzi per creare quello che vogliono – talvolta oggetti del mondo reale come una persona (figura 3) o una casa (figura 4); talvolta altri oggetti, come il pezzo 3 o disegni astratti.

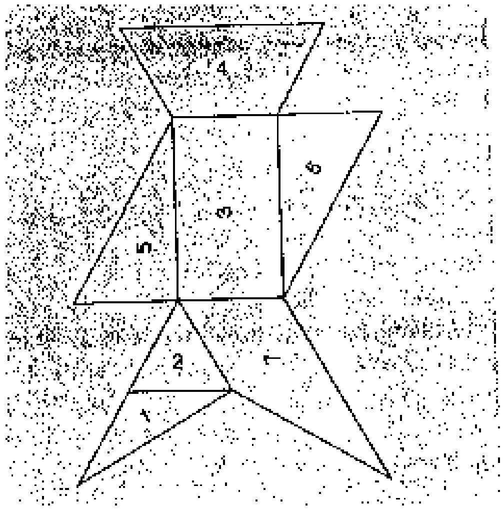


Figura 3: una persona

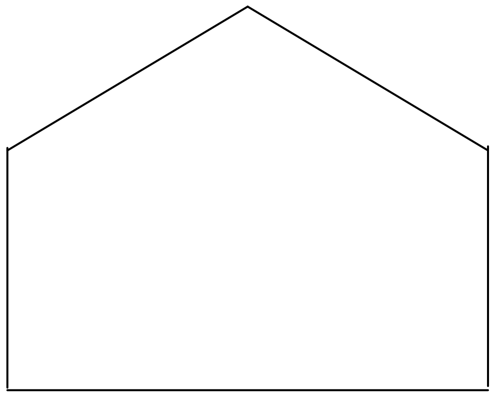


Figura 4: una casa

Bisognerebbe dare ai bambini ampia opportunità di gioco libero e di espressione della loro creatività. Questi giochi forniscono agli insegnanti una possibilità di osservare come i bambini usano i pezzi e di accertarsi in maniera informale di come essi pensano e parlano delle forme.

Nel gioco libero i bambini possono unire due pezzi per formarne un altro, per esempio usando i pezzi 5 e 6 possono formare il pezzo 3. Possiamo chiedere loro tutti i pezzi che possono essere formati con altri due pezzi. Solo i pezzi 1 e 2 non lo sono.

Prova questa attività e quindi trova quel pezzo che può essere formato con altri tre.

I bambini possono porre i pezzi direttamente sopra il pezzo che stanno cercando di ricostruire o rifarlo vicino ad esso per un facile confronto visivo.

Per registrare la soluzione i bambini dovrebbero disegnare il contorno del pezzo e quindi indicare come lo hanno ricostruito con gli altri pezzi o mostrare il loro metodo con penne colorate su griglie triangolari.
Questa attività porta i bambini ad osservare che, congiungendo due pezzi, talvolta costruiscono una forma che non corrisponde ad una della sette originali.
Essi possono ricercare quante forme differenti possono essere fatte con una coppia di pezzi, congiungendoli lungo i lati che coincidono.
Con i pezzi 5 e 6 sono possibili sei forme, una sola delle quali è la stessa del pezzo originale.
Cerca queste combinazioni e quindi esegui la stessa attività con pezzi 1 e 2.
Mediante mosaici che richiedono due o più pezzi si possono introdurre nuove forme.
La forma in figura 5 può essere costruita in due modi: l'uno utilizzando i pezzi numerati con 2 e 4, l'altro utilizzando i pezzi 2 e 4 girati con il numero in vista. La stessa cosa può essere fatta con i pezzi 1 e 7? E con i pezzi 1 e 7 girati? Quale altra copia di pezzi può essere usata per fare la stessa forma e possono i bambini operare se i pezzi sono girati?

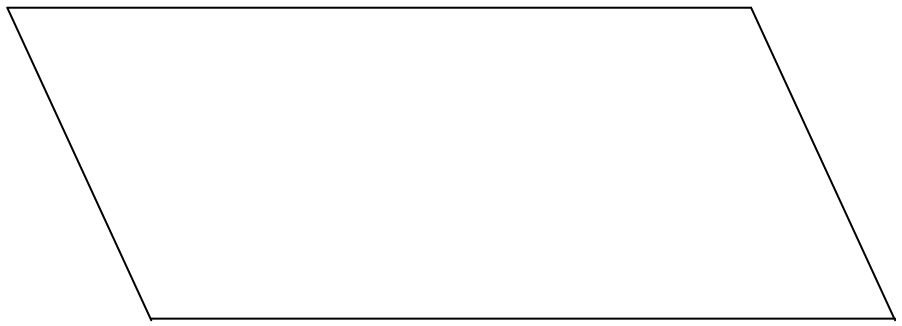


Figura 5: questa forma può essere costruita in più modi diversi

Il fatto di ostruire questa forma in differenti modi con due pezzi può suggerire ai bambini di chiedere "Possiamo costruirla anche con tre pezzi?"
Prova con i pezzi 1, 2 e 5 e fallo in modi differenti con questi tre pezzi.
Prova pure con i pezzi 1, 2 e 5 girati.
Nel comporre mosaici di questo tipo i bambini lavorano visivamente con angoli che si adattano e con lati che coincidono. Essi possono osservare che per alcuni pezzi i lati coincidono anche se sono girati mentre per altri no.
I pezzi 2 e 3 coincidono ambedue quando girati; il pezzo 7 no poiché il fatto di girarlo cambia il suo orientamento ed il suo modo di apparire. Il pezzo 1 è girabile? Ed i pezzi 4, 5 e 6?

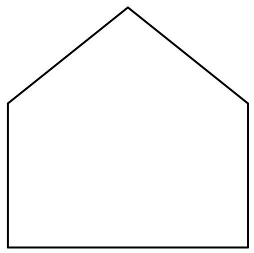
Schede mosaico

Ora io presento puzzle più complessi. Le indicazioni possono essere fornite o verbalmente o mediante schede. Leggi e prova. Esse illustrano come figure che sono state create con due pezzi possano avere soluzioni che utilizzano altri pezzi. Pensa a quanta geometria coinvolgono ed alle conversazioni che i bambini possono avere mentre le risolvono.

Scheda di compito

Mosaico casa

1. Su un foglio di carta costruisci una casa come questa usando due pezzi
2. Traccia il contorno della casa che devi ricostruire
3. Ricostruisci la forma con due altri pezzi
4. Costruisci la forma con tre pezzi. Sei in grado di trovare due modi per farlo?
5. La forma può essere fatta con quattro pezzi?



Mosaico casa alta

1. Su un pezzo di carta costruisci una casa alta con il pezzo 2 come tetto ed un altro pezzo
2. Traccia il contorno della casa alta che devi ricostruire
3. Rifai la stessa forma con i pezzi 5 e 7
4. La casa può essere fatta con tre pezzi?

Costruisci un puzzle

1. Usa due, tre o quattro pezzi. Costruisci una forma. Traccia il contorno su una scheda. Colorala.
2. Puoi fare la stessa forma con altri pezzi?
3. Scrivi sul foglio il tuo nome ed il titolo della forma

Alcuni bambini utilizzano strategie per risolvere questi figure. Per esempio nella parte 4 di ambedue le figure casa i bambini che conoscono che il pezzo rettangolo 3 può essere fatto con i pezzi 5 e 6 possono usare questa relazione per trovare una soluzione, ponendo i pezzi 1 e 2 sopra ed i pezzi 5 e 6 nella forma rettangolare sotto. È importante che i bambini discutano i loro tentativi con i compagni di classe, usando possibilmente un proiettore per "mostrare e parlare". Gli insegnanti devono anche incoraggiare il problem posing. Ai bambini piace creare mosaici perché altri li risolvano: i mosaici possono essere presentati come forme ritagliate o disegnati su cartoncini o costruiti in un laboratorio di matematica. I bambini possono indicare i mosaici con i loro nomi – per esempio, il mosaico casa grande con il nome Dina – il che personalizza le creazioni.

Possono essere fatti ingrandimenti di pezzi, per esempio i pezzi 2 e 4 formano un ingrandimento del pezzo 2. Provare questo ingrandimento e quindi farlo con due altri pezzi e poi con tre.

L'ingrandimento ha i lati doppi del pezzo 2, cosa che possiamo facilmente vedere ricostruendolo sulla griglia triangolare (figura 7).

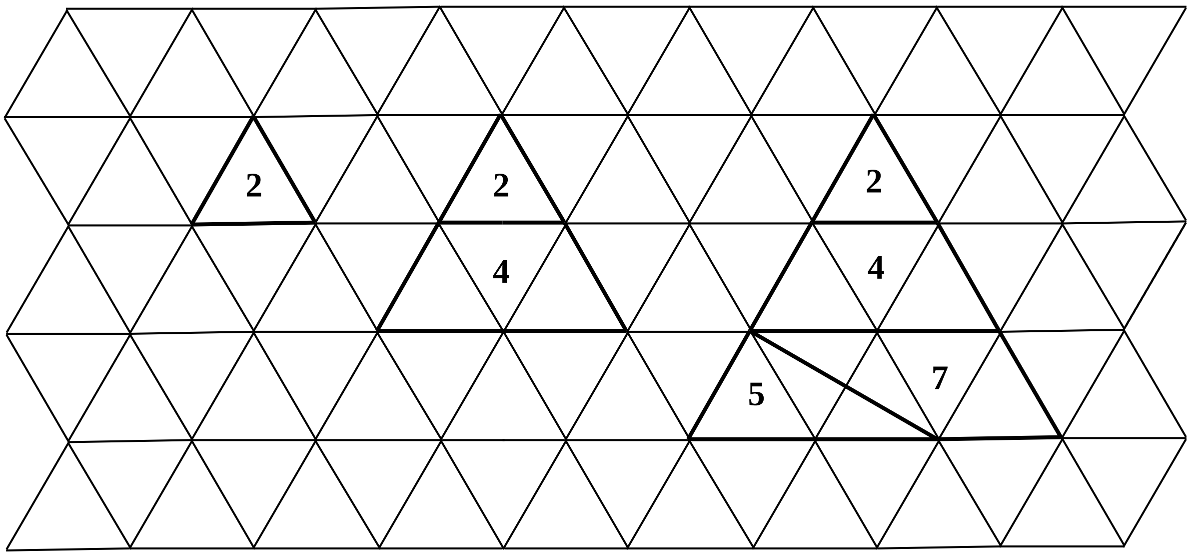


Figura 7: ingrandimenti del pezzo 2

Usando i pezzi 2, 4, 5 e 7 costruire un ingrandimento con lato triplo del pezzo 2. Trovare altri quattro pezzi che funzionano.

Sfida: fare un ingrandimento con tutti i sette pezzi.

Confrontando i lati e gli angoli di questi triangoli con quelli del pezzo 2 vediamo che i lati diventano progressivamente più grandi mentre gli angoli rimangono gli stessi.

Esplorando forme geometriche ed angoli

I bambini notano subito che i lati del pezzo 2 hanno la stessa lunghezza e lo stesso vale per tutti gli ingrandimenti. A questo punto possiamo dare un nome a queste figure – triangolo equilatero – e chiedere ai bambini perché il nome è appropriato, cioè ha tre lati uguali.

Con questa partenza possiamo apprezzare il vantaggio di questo approccio per l'insegnamento della geometria. Prima di tutto i bambini vengono coinvolti in attività piacevoli e divertenti. Devono operare con mosaici e quindi imparano cose senza l'intenzione di imparare. Al momento opportuno gli insegnanti possono introdurre i nomi dei pezzi. Dopo un po' di tempo i bambini useranno essi stessi i nomi ed impareranno che il nome rimane lo stesso indipendentemente da dove viene posto il pezzo. Essi incominceranno a notare le caratteristiche delle forme; gli angoli sono uguali; rimangono uguali quando girate – simmetria assiale – o ruotate – simmetria rotazionale. I bambini possono apprendere nello stesso modo con gli altri pezzi.

Quindi il nome *rettangolo* viene dato al pezzo 3. Ai bambini si dice che tutte tre le forme in figura 8 sono rettangoli e si chiede loro di ricostruirle.

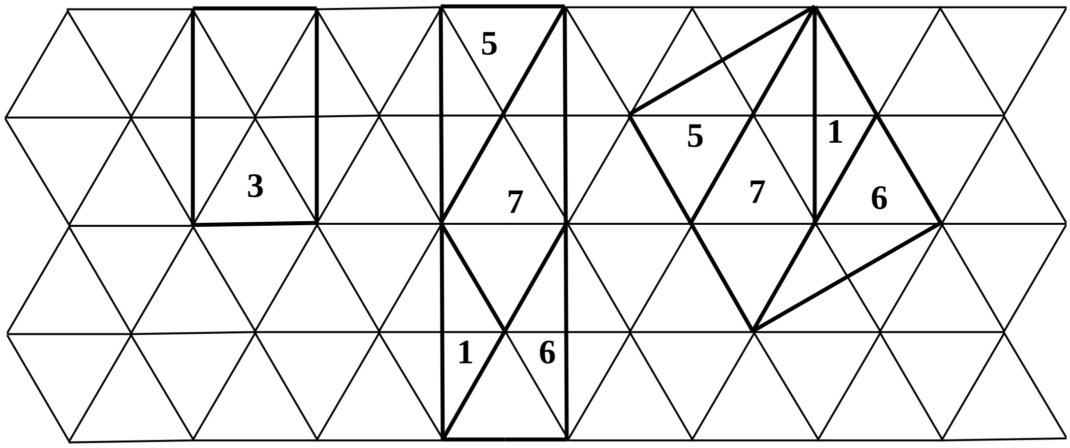


Figura 8: rettangoli

I bambini costruiscono il rettangolo alto con i pezzi 1, 5, 6 e 7 ed il rettangolo in posizione ruotata con i pezzi 1, 7 e con i pezzi 5 e 6 girati.

È possibile costruire altri rettangoli? Naturalmente il rettangolo più grande è il rettangolo grande di figura 1. È una sfida per i bambini ricostruirlo senza vedere il disegno completo.

I bambini possono arrangiare i pezzi in più modi e quindi divertirsi ad ottenere modi diversi. Costruendo vari rettangoli i bambini scopriranno, dopo un po' di tempo, che non tutti i rettangoli sono ingrandimenti di altri rettangoli, come invece capitava per i triangoli equilateri. Inoltre, a differenza dei triangoli equilateri, il rettangolo è una forma comune nella vita di ogni giorno e si può chiedere ai bambini di portare esempi di questa forma, prendendolo dall'ambiente scolastico e da casa. Dopo avere studiato i rettangoli i bambini possono analizzare i pezzi 5 e 6, che formano il pezzo 3. Queste forme sono triangoli rettangoli.

Si può chiedere ai bambini di costruire altri triangoli rettangoli – per esempio, provare con i pezzi 1, 2, 5 e 6; o 3, 5, e 6 – e controllare che essi sono ingrandimenti del pezzo 5.

I bambini possono anche fare giochi che richiamino la loro attenzione sulle forme e le loro parti.

Possono giocare a “prendi e trova la forma”, nel quale essi tengono in mano un pezzo senza vederlo e tentano di trovare il pezzo uguale. Il porre la domanda “Cosa sai?” incoraggia la comunicazione descrittiva dei pezzi, come, per esempio, per il pezzo 7 “ha quattro lati ed angoli a punta”.

Adattare pezzi in mosaici aiuta i bambini a diventare consapevoli delle caratteristiche dei lati e degli angoli dei pezzi. Alcuni pezzi hanno angoli retti, altri hanno angoli “appuntiti”. Alcuni hanno due lati uguali, altri hanno tutti i lati uguali o nessun lato uguale. Il linguaggio dei lati e degli angoli può essere introdotto ora, ma, naturalmente, senza una definizione formale. I bambini possono confrontare pezzi triangolari e mostrare in che cosa essi sono simili – per esempio, tre lati, tre angoli – e differenti – per esempio, tutti i lati uguali, due lati uguali, nessun lato uguale; per gli angoli la stessa cosa. Il pezzo 1 ha due angoli uguali. Quale altro pezzo ha la stessa proprietà? Porre gli angoli uno sopra l’altro per verificare se hanno angoli uguali aiuta i bambini a capire che la dimensione dell’angolo non dipende dalla lunghezza dei lati.

Nei mosaici compaiono angoli di cinque dimensioni.

Il chiedere ai bambini di confrontare gli angoli dei pezzi con quelli di un quadrato porta ad un lavoro informale con gli angoli acuti – quelli minori di un angolo retto – e con gli angoli ottusi – quelli maggiori di un angolo retto.

Partendo dal linguaggio che i bambini inventano su questi tipi di angoli, gli insegnanti possono gradualmente introdurre i termini convenzionali.

I bambini possono trovare relazioni tra gli angoli dei pezzi del mosaico – per esempio, che relazione c’è tra l’angolo più piccolo e gli altri angoli; essi sono uguali a due, tre, quattro e cinque volte il più piccolo. Queste attività vengono fatte senza riferirsi alla misura dell’angolo e costituiscono la base per l’ulteriore lavoro con gli angoli, la loro misura in gradi e le relazioni tra gli angoli.

Un’interessante attività per i bambini che conoscono la misura degli angoli è quella di indovinare la misura degli angoli in tutti e sette i pezzi senza usare il goniometro.

Sono possibili molti modi ed i bambini possono confrontare i loro approcci. Esaminiamo i pezzi in figura 1 e troviamo le misure degli angoli di ciascun pezzo. Pensa alle relazioni tra gli angoli che tu hai usato e se puoi pensare di trovare queste misure in altri modi, usando altre relazioni tra gli angoli.

I bambini che utilizzano la griglia triangolare per registrare le soluzioni ai mosaici diventano consapevoli degli angoli uguali sulla griglia ed anche delle linee parallele. Si può chiedere loro di cercare linee che sembrano i binari di un treno e evidenziarle con penne di colore diverso, creando disegni che mostrano tre insiemi di linee parallele. Il parallelismo delle rette è una proprietà necessaria per descrivere i pezzi 4 e 7 – trapezi, che hanno due lati paralleli – e si applica anche ai lati opposti del pezzo 3, un rettangolo.

Altre attività con il mosaico

L’attività di riempire lo spazio del puzzle con i pezzi fornisce l’opportunità di eseguire esperienze che interessano l’area. Mediante confronto diretto i bambini mostrano che alcuni pezzi occupano più spazi di altri – il pezzo 7 ha area più grande del pezzo 2 – o scoprire relazioni del tipo che il pezzo 5 è doppio del pezzo 3.

Il lavorare con forme sulla griglia triangolare rivela altre relazioni, del tipo che il pezzo 4 ha 3 volte l’area del pezzo 2 o come l’area del pezzo 2 può essere confrontata con l’area dei suoi ingrandimenti (figura 7). Una simile esplorazione dell’area può essere fatta con il pezzo 4 ed i suoi ingrandimenti.

Questi tipi di esperienze con l’area sono il fondamento per l’ulteriore lavoro con quadrati di area unitaria e per la scoperta dei modi per trovare l’area di varie forme – per esempio, perché l’area del triangolo rettangolo è metà dell’area del rettangolo – e come l’ingrandimento di una forma, per esempio il raddoppio delle lunghezze dei lati, ha effetto sull’area.

Per sviluppare ulteriormente il loro pensiero descrittivo riguardo ai vari pezzi, i bambini possono giocare vere partite con i pezzi o le forme che hanno preparato. Osservazioni per il pezzo 4 possono essere: quattro lati, quattro angoli, due lati uguali, due angoli acuti uguali e due linee parallele”. Le caratteristiche vengono rivelate una alla volta durante l’esame della forma.

Dopo la determinazione di ciascuna caratteristica i bambini dicono per quali pezzi è valida e per quali no e spiegano il perché.

Essi possono giocare anche al gioco “indovina il pezzo”, nel quale pongono all’insegnante domande a risposta sì o no riguardo alla forma misteriosa. L’insegnante può elencare sulla lavagna domande e chiedere ai bambini se sono necessarie per identificare la forma.

I bambini possono accorgersi che alcune proprietà ne implicano altre, come per esempio che “tre lati” significa che la forma ha “tre angoli”.

Questi tipi di gioco permettono ai bambini di fare pratica con le proprietà che hanno imparato fino ad ora e forzano l’utilizzo da parte dei bambini del linguaggio descrittivo come strumento per ragionare sulle forme e sulle loro proprietà. Essi forniscono agli insegnanti una finestra sui livelli di sviluppo del pensiero del bambino, che in questo momento si trova tra il livello descrittivo e quello successivo, nel quale le proprietà sono logicamente ordinate.

Dopo avere giocato con questo particolare mosaico in questi tipi di attività, ci rendiamo conto che molte altre domande possono essere poste e che è possibile esplorare molti altri argomenti.

Inoltre possono essere usati molti altri tipi di griglie e mosaici basati su altre forme, come quelli basati sui quadrati, che portano in maniera naturale all’area e alla geometria delle coordinate, che connette forme e numeri.

Riflessione sull'attività e sguardo in avanti

L'attività dei mosaici ed altre attività che utilizzano piegamenti di fogli, disegni e blocchi possono arricchire il magazzino delle strutture visive del bambino. Possono anche sviluppare la conoscenza delle forme e delle loro proprietà. Per promuovere la transizione da un livello a quello successivo, l'insegnamento deve seguire una successione di attività in cinque punti.

- L'insegnamento dovrebbe iniziare con una **fase di indagine** nella quale i materiali servono da guida ai bambini nell'esplorazione e nella scoperta di certe strutture.
- Nella seconda fase, di **orientamento diretto**, i compiti vengono presentati in modo tale che le strutture caratteristiche appaiano gradualmente ai bambini, per esempio attraverso mosaici che rivelano la simmetria dei pezzi o attraverso giochi del tipo "pensa e trova la forma".
- Nella terza fase, quella di **esplicitazione**, l'insegnante introduce la terminologia ed incoraggia i bambini ad usarla nella conversazione e nei lavori scritti di geometria.
- Nella quarta fase, quella del **libero orientamento**, l'insegnante presenta compiti che possono essere completati in modi differenti e mette in grado i bambini di diventare più efficienti con quanto conoscono, per esempio attraverso esplorazioni di differenti forme con vari pezzi o attraverso giochi sulle caratteristiche.
- Nella quinta e ultima fase, **l'integrazione**, i bambini hanno l'opportunità di integrare ciò che hanno appreso, creando forse loro stessi le proprie attività sulle caratteristiche.

Nel corso di queste fasi l'insegnante ha vari ruoli: pianificare i compiti, dirigere l'attenzione dei bambini sulle qualità geometriche delle forme, introdurre la terminologia, favorire tra i bambini discussioni nelle quali utilizzare i termini appresi, incoraggiare approcci di tipo esplicativo e di problem solving, che permettano ai bambini di fare uso del pensiero descrittivo che interessa le forme.

Percorrere queste cinque fasi con materiali come i mosaici, mette in grado i bambini di costruire una base ricca per il pensiero visivo e descrittivo che coinvolge varie forme e le loro proprietà.

Ricordiamo, la geometria inizia con il gioco. Adopera materiali come il mosaico a sette pezzi. Gioca tu stesso con esso. Rifletti su quali argomenti geometrici vengono interessati e su come sia la successione delle attività che sviluppano il livello di pensiero geometrico relativo all'argomento.

Quindi coinvolgi i tuoi studenti in giochi, attività che permettano un apprendistato nel pensiero geometrico. I bambini il cui pensiero geometrico viene nutrito con cura saranno più capaci di studiare con successo quel tipo di matematica che Euclide ha creato.

Bibliografia

Fuys, David, Geddes, Doroty, Tischler, Rosamund, “The van Hiele model of thniking in geometry among adolescents”, in *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph Series, n° 3, Reston, Va., National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

Van Hiele, Pierre M., *Structure and Insight*, Orlando, Fla., Academic Press, 1986.

— Structuur (Structure), Zutphen, Nederlands, Thieme, 1997.