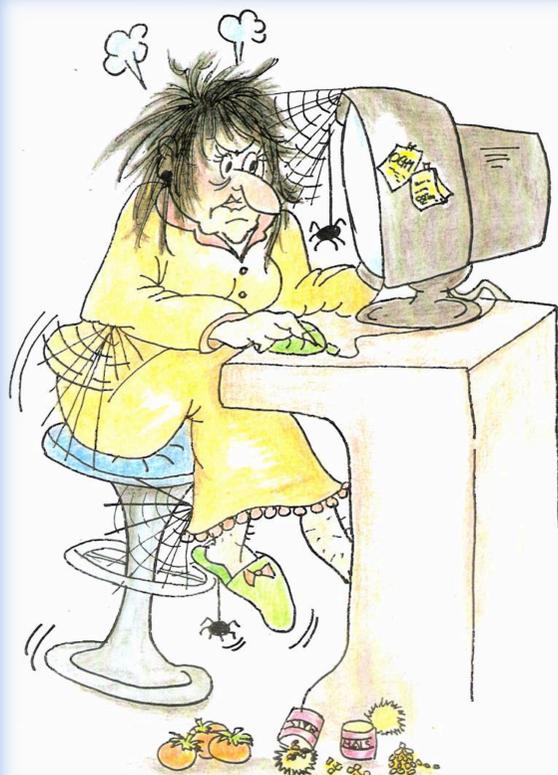


L'INCONTRO DELLE PARALLELE: GEOMETRIE ... E NON SOLO!



Silvia Benvenuti
Scuola di Scienze e Tecnologie
Università di Camerino



Le idee, i risultati e i personaggi della matematica
Accademia Nazionale dei Lincei
Milano, 1 febbraio 2016

Quello che ci hanno sempre insegnato ...

Quello che ci hanno sempre insegnato ...

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è uguale al
quadrato costruito
sull'ipotenusa**

Quello che ci hanno sempre insegnato ...

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è uguale al
quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, esiste una e una
sola parallela ad r passante per P**

Quello che ci hanno sempre insegnato ...

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è uguale al
quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, esiste una e una
sola parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni
di un triangolo è uguale a 180°**

Quello che ci hanno sempre insegnato ...

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è uguale al
quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, esiste una e una
sola parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni
di un triangolo è uguale a 180°**

**Dato un triangolo, è sempre
possibile costruirne uno *simile*
ma più grande (*omotetia*)**

... dimentichiamolo per oggi!

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è uguale al
quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, esiste una e una
sola parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni
di un triangolo è uguale a 180°**

**Dato un triangolo, è sempre
possibile costruirne uno *simile*
ma più grande (*omotetia*)**

... dimentichiamolo per oggi!

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è minore del
quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, esiste una e una
sola parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni
di un triangolo è uguale a 180°**

**Dato un triangolo, è sempre
possibile costruirne uno *simile*
ma più grande (*omotetia*)**

... dimentichiamolo per oggi!

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è maggiore
del quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, esiste una e una
sola parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni
di un triangolo è uguale a 180°**

**Dato un triangolo, è sempre
possibile costruirne uno *simile*
ma più grande (*omotetia*)**

... dimentichiamolo per oggi!

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è maggiore
del quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, esiste più di una
parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni
di un triangolo è uguale a 180°**

**Dato un triangolo, è sempre
possibile costruirne uno *simile*
ma più grande (*omotetia*)**

... dimentichiamolo per oggi!

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è maggiore
del quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, non esiste nessuna
parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni
di un triangolo è uguale a 180°**

**Dato un triangolo, è sempre
possibile costruirne uno *simile*
ma più grande (*omotetia*)**

... dimentichiamolo per oggi!

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è maggiore
del quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, non esiste nessuna
parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni di
un triangolo è minore di 180°**

**Dato un triangolo, è sempre
possibile costruirne uno *simile*
ma più grande (*omotetia*)**

... dimentichiamolo per oggi!

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è maggiore
del quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, non esiste nessuna
parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni di
un triangolo è maggiore di 180°**

**Dato un triangolo, è sempre
possibile costruirne uno *simile*
ma più grande (*omotetia*)**

... dimentichiamolo per oggi!

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è maggiore
del quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, non esiste nessuna
parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni di
un triangolo è maggiore di 180°**

**Se due triangoli hanno gli
stessi angoli interni, allora
hanno la stessa area**



racconti di fate



racconti di fate

geometrie da manicomio



racconti di fate



geometrie da manicomio

elucubrazioni deliranti di un
professore universitario
elevate al rango di nuove
verità sovrumane, per merito
della sua megalomania

racconti di fate

la geometria non
euclidea non può
procurare agli studenti
altro che stanchezza,
vuotezza, arroganza e
stupidità



geometrie da manicomio

elucubrazioni deliranti di un
professore universitario
elevate al rango di nuove
verità sovrumane, per merito
della sua megalomania

racconti di fate

geometrie da manicomio

la geometria non
euclidea non può
procurare agli studenti
altro che stanchezza,
vuotezza, arroganza e
stupidità

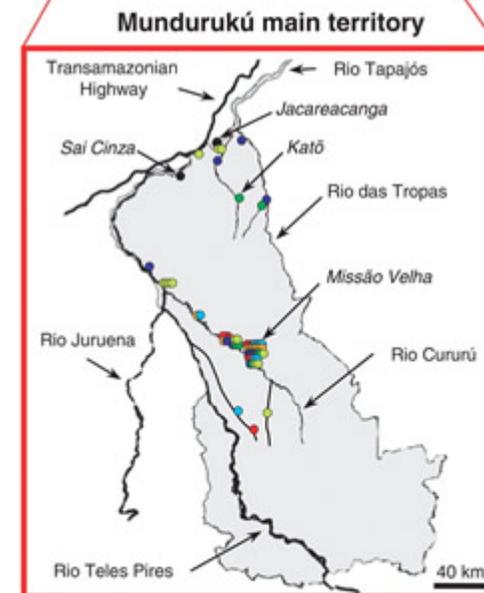
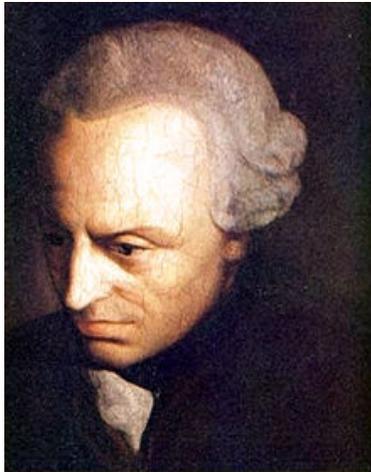


elucubrazioni deliranti di un
professore universitario
elevate al rango di nuove
verità sovrumane, per merito
della sua megalomania

i geometri non euclidei hanno una comprensione oscura e menti
ingannevoli, e l'insegnamento della geometria non euclidea in
università e scuole darebbe origine a una razza di studenti che
potrebbe compromettere la società

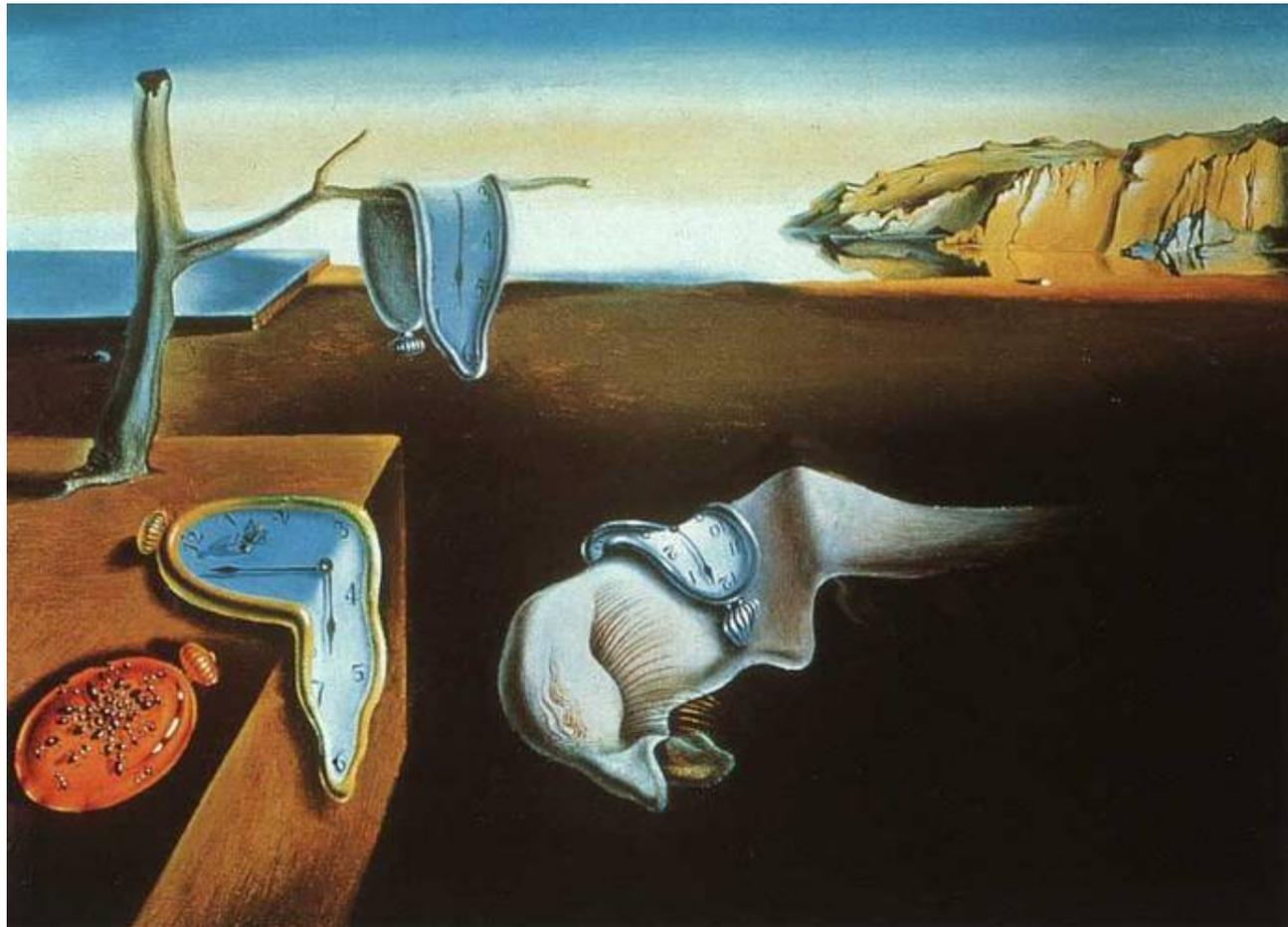
Kant ... e i Munduruku

**Immanuel Kant
(1724-1804)**



La rivoluzione non euclidea: libertà!

La rivoluzione non euclidea: libertà!



Libertà: l'influenza sull'arte moderna

«se si desiderasse collegare lo spazio dei pittori a qualche geometria, bisognerebbe fare riferimento ai sapienti non euclidei, meditare su certi [loro] teoremi» *Du cubisme* (1912), A. Gleizes e J. Metzinger

«Lobačevskij ha fatto esplodere l'assolutismo di Euclide. Con Gauss e Riemann egli ha distrutto il rigido spazio euclideo. Tutti gli oggetti matematici che essi hanno stabilito sono inimmaginabili e inaccessibili alla sensazione. Lo schiudersi della nuova epoca, annunciata dalla costruzione di nuovi mondi matematici, portava con sé una tentazione, e gli artisti non hanno saputo resistere alla sua forza seduttrice. [...] Noi abbiamo deciso di accettare come evidenti e necessarie le concezioni che i nostri predecessori hanno considerato come inconcepibili e che, in effetti, essi erano incapaci di concepire».

E. El Lissitzky (1830-1941)

«Un quadro è l'arte di far incontrare due linee, di cui si constata geometricamente il parallelismo, su una tela, davanti ai nostri occhi, nella realtà di un mondo trasfigurato che segua nuove condizioni e possibilità»

T. Tzara (1896-1963)

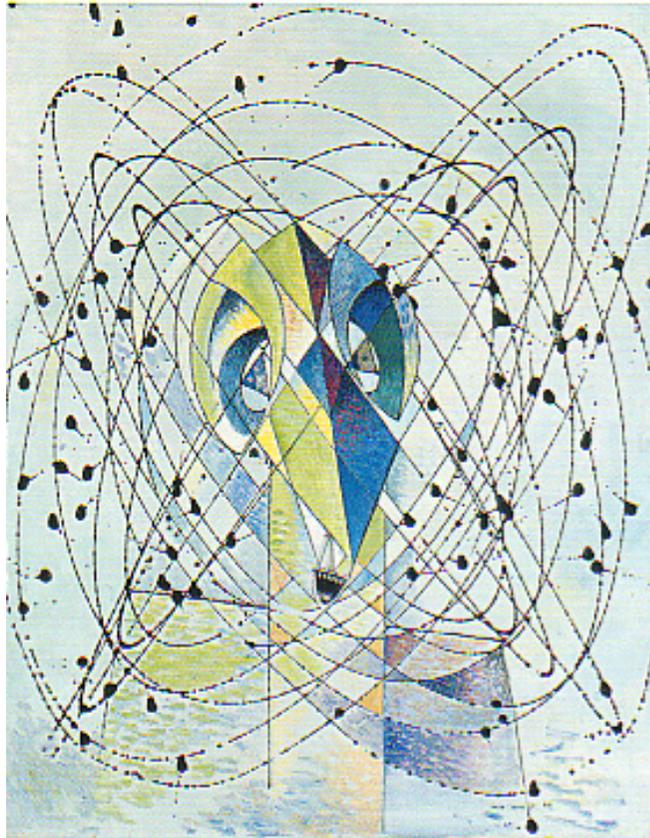
Pelham Grenville Wodehouse, Herbert George Wells, Oscar Wilde, Joseph Conrad, Ford Madox Ford, Marcel Proust, Gertrude Stein

Alexander Scriabin, Edgar Varèse, George Antheil

«La matematica è la scienza della *libertà*: la geometria non euclidea è nata non per misurazioni, ma sulla base della libera scelta umana di negare in maniera non distruttiva».

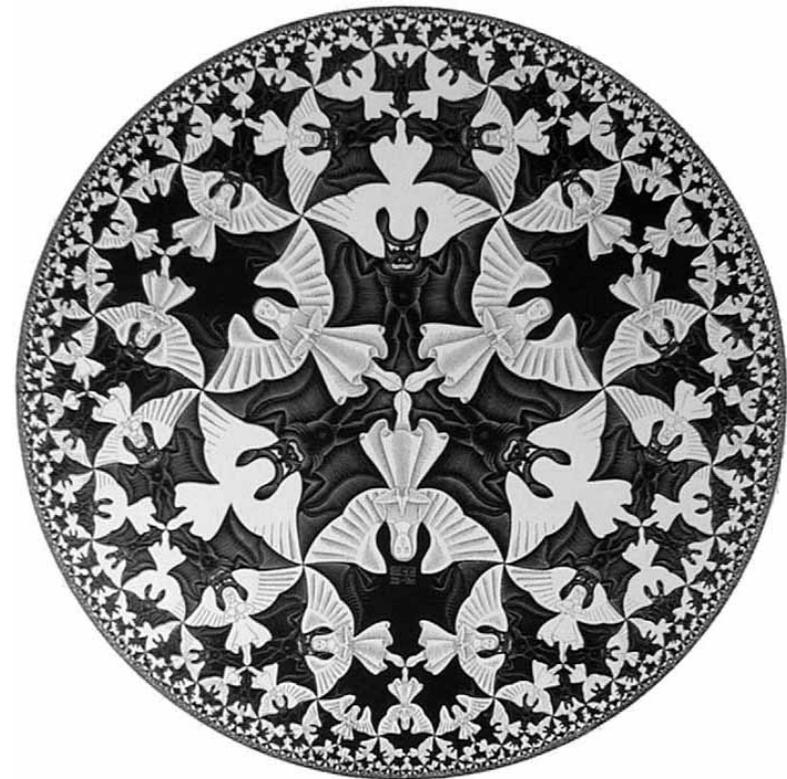
Imre Toth

La rivoluzione non euclidea: libertà!

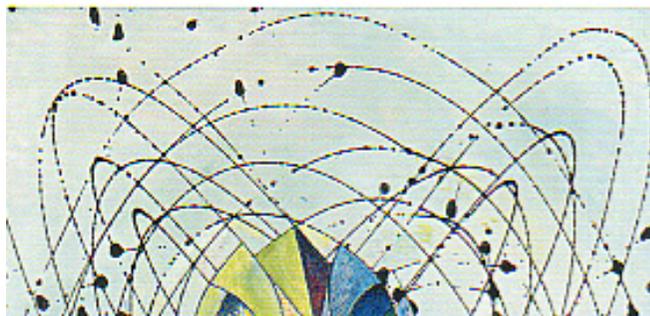


**Ragazzo affascinato dal volo
di una mosca non euclidea,
Max Ernst (1942)**

**Cerchio limite IV,
M. C. Escher (1969)**



La rivoluzione non euclidea: libertà!



**Ragazzo affascinato dal volo
di una mosca non euclidea,
Max Ernst (1942)**

**Cerchio limite IV,
M. C. Escher (1969)**



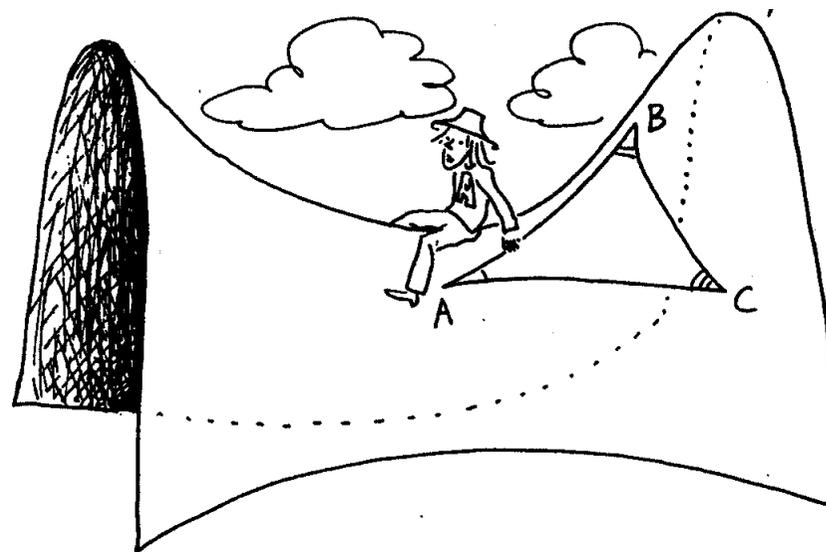
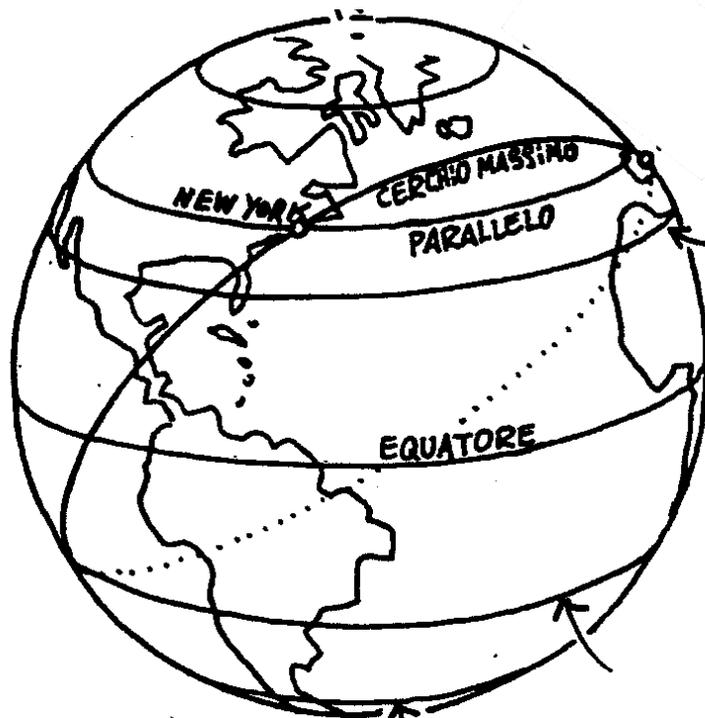
**«La matematica è la scienza della *libertà*:
la geometria non euclidea è nata non per misurazioni,
ma sulla base della libera scelta umana di negare
in maniera non distruttiva».**

Imre Toth

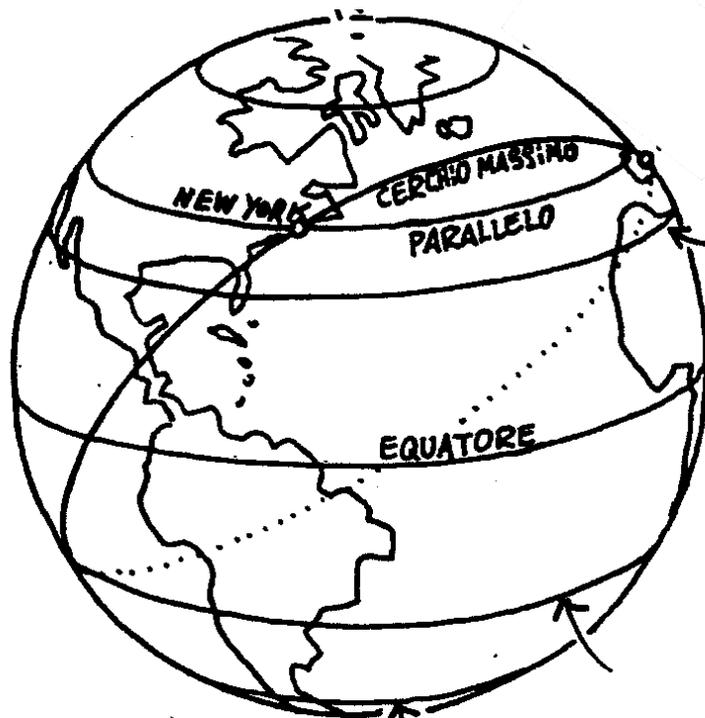
A pensarci bene ...



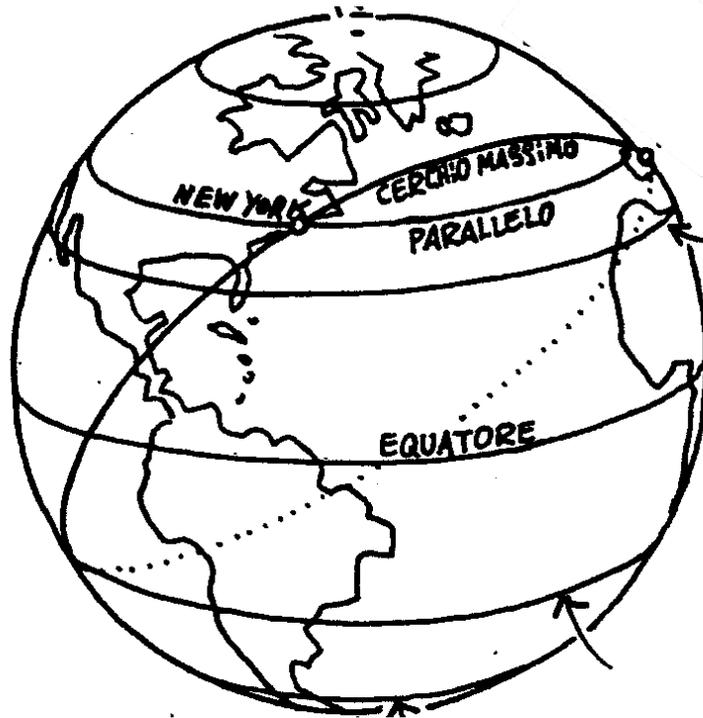
Fare geometria su superfici diverse dal piano



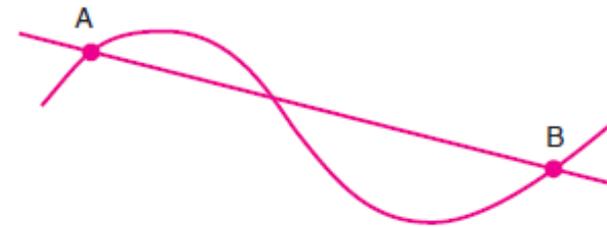
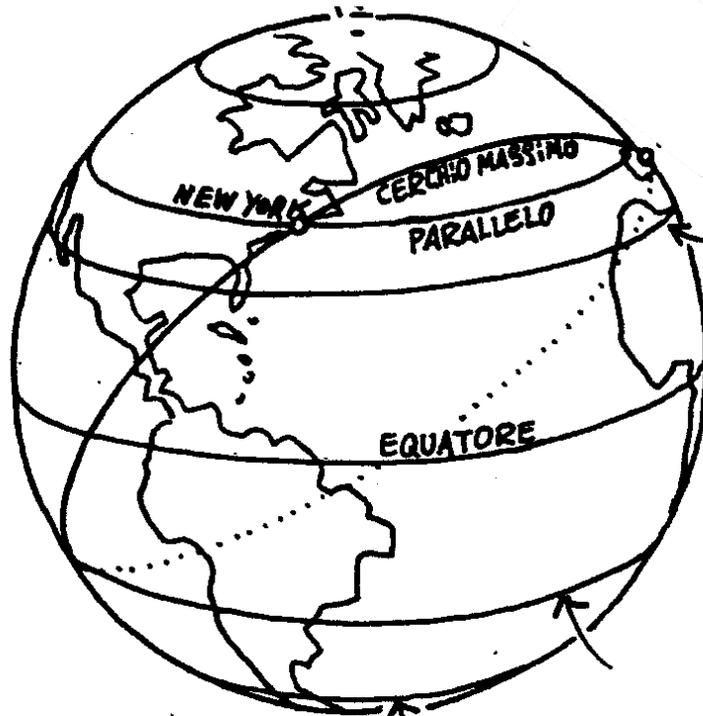
Geometria del mappamondo



Geometria del mappamondo

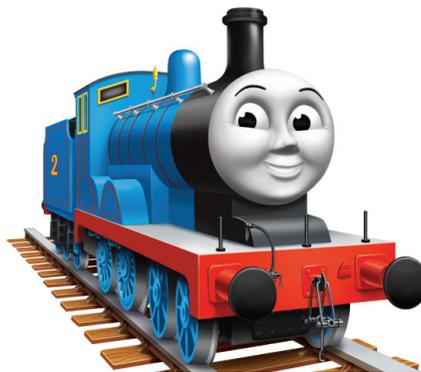
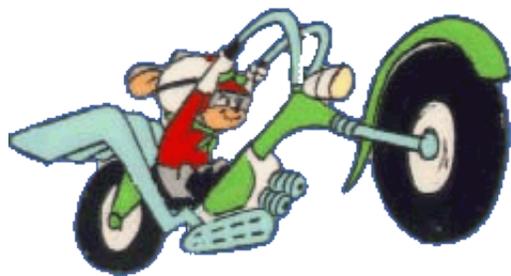
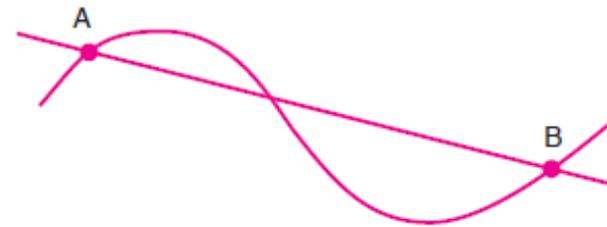


Geometria del mappamondo



Cosa vuol dire
“andare a dritto”
sul mappamondo?!

Geometria del mappamondo



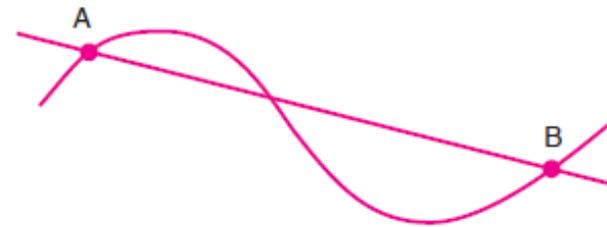
Cosa vuol dire
“andare a dritto”
sul mappamondo?!

Geometria del mappamondo



Cosa vuol dire
“andare a dritto”
sul mappamondo?!

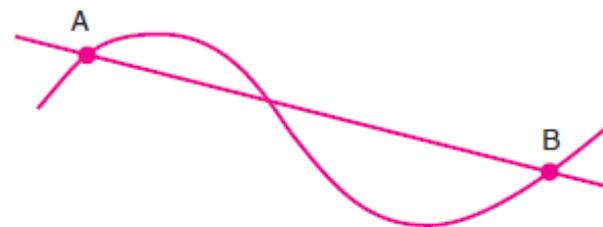
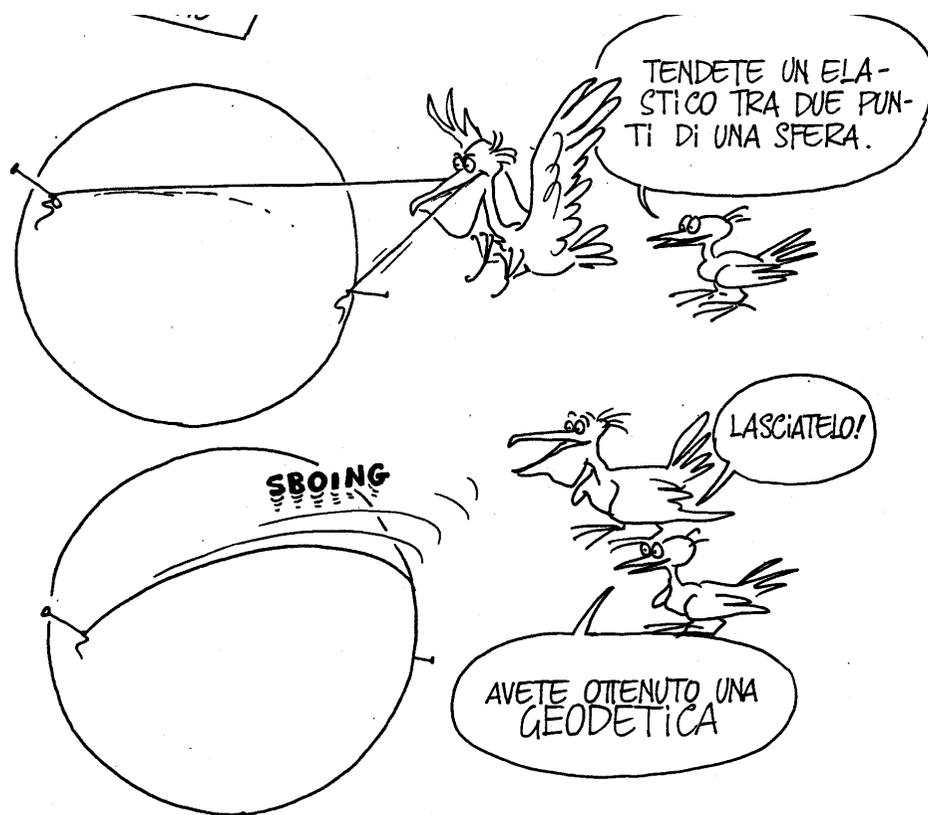
Geometria del mappamondo



Cosa vuol dire
“andare a dritto”
sul mappamondo?!

Segmento AB =
il più breve tra tutti i percorsi
che congiungono A e B

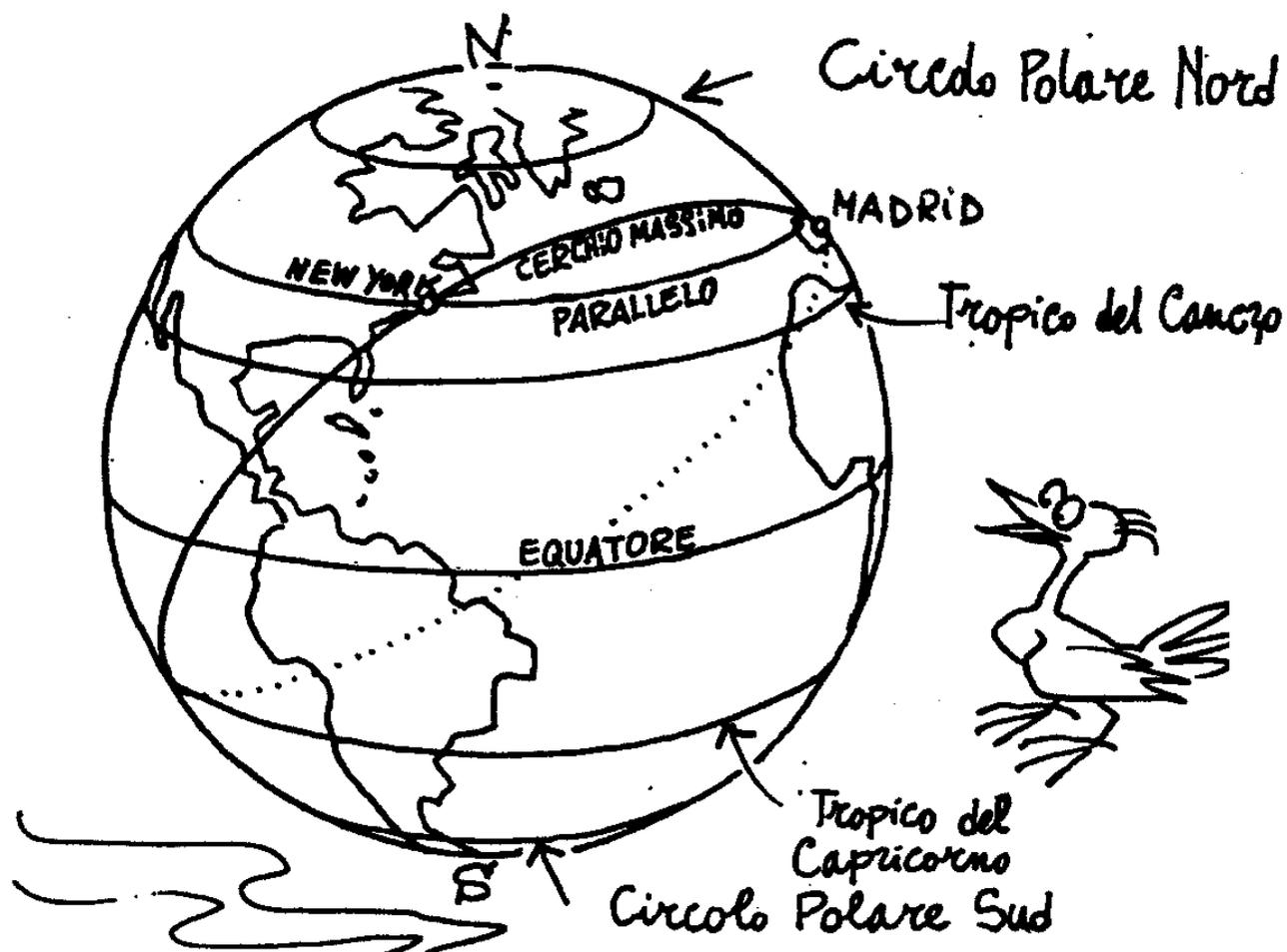
Geometria del mappamondo



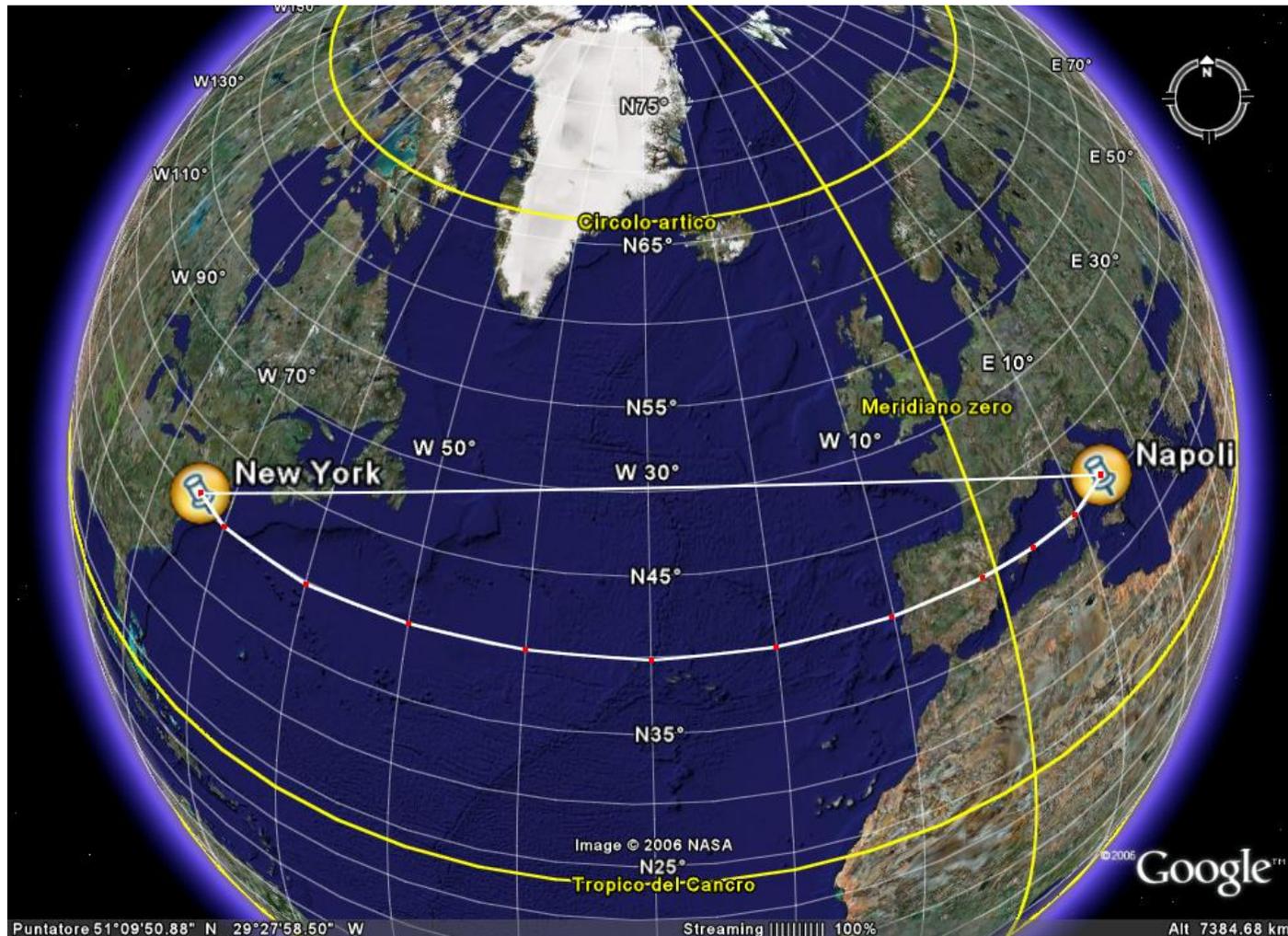
Cosa vuol dire
“andare a dritto”
sul mappamondo?!

Segmento AB =
il più breve tra tutti i percorsi
che congiungono A e B

Segmenti e rette del mappamondo



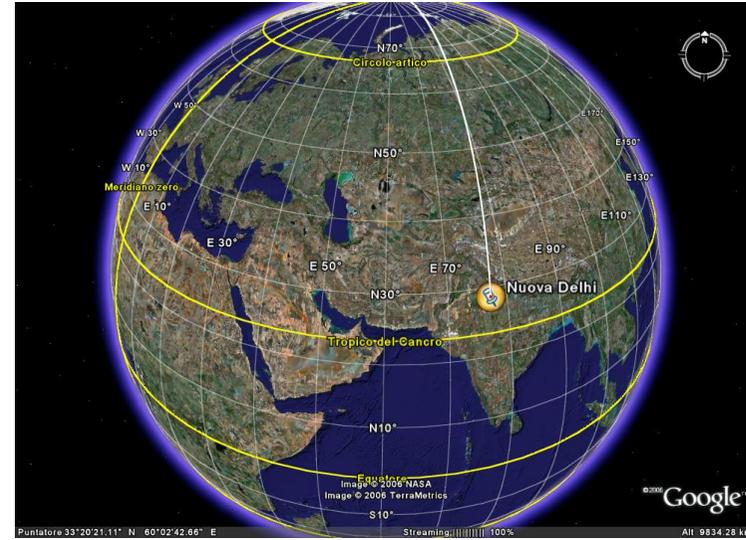
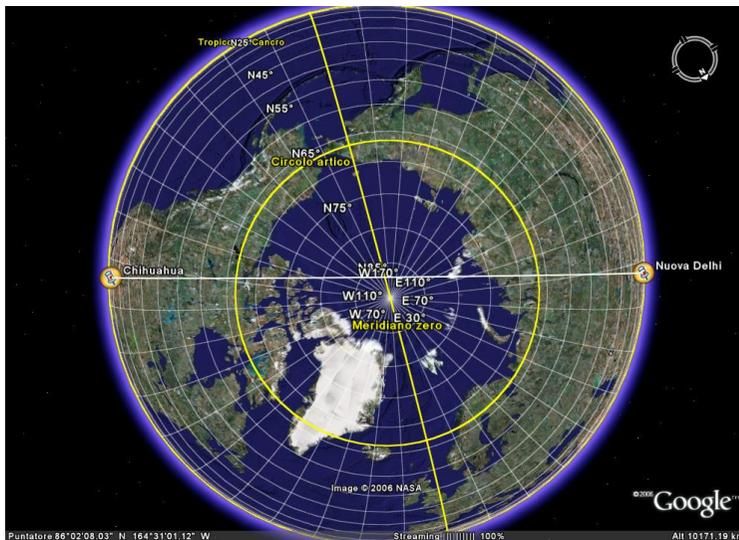
Le rette del mappamondo



Le rette del mappamondo



Le rette del mappamondo



Le rette del mappamondo



Fare geometria sul mappamondo (S^2)

Fare geometria sul mappamondo (S^2)

1. Per due punti non antipodali di S^2 passa sempre una e una sola retta, mentre per due punti antipodali passano infinite rette;

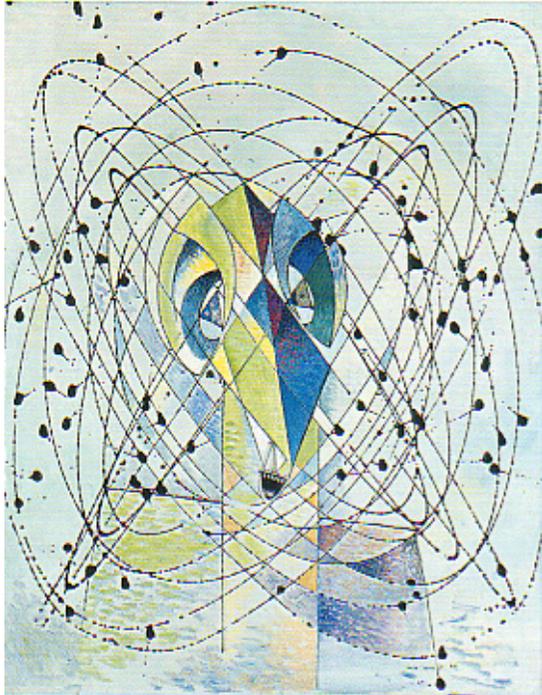
Fare geometria sul mappamondo (S^2)

1. Per due punti non antipodali di S^2 passa sempre una e una sola retta, mentre per due punti antipodali passano infinite rette;
2. Su S^2 non esistono rette parallele, perché due rette qualunque hanno sempre due punti in comune;

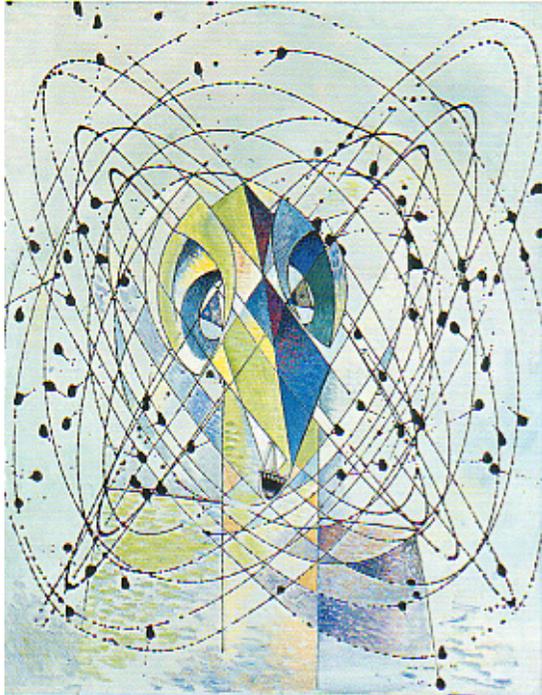
Fare geometria sul mappamondo (S^2)

1. Per due punti non antipodali di S^2 passa sempre una e una sola retta, mentre per due punti antipodali passano infinite rette;
2. Su S^2 non esistono rette parallele, perché due rette qualunque hanno sempre due punti in comune;
3. Le rette di S^2 sono curve chiuse e hanno tutte la stessa lunghezza finita.

Geometria dello sputo



Geometria dello sputo

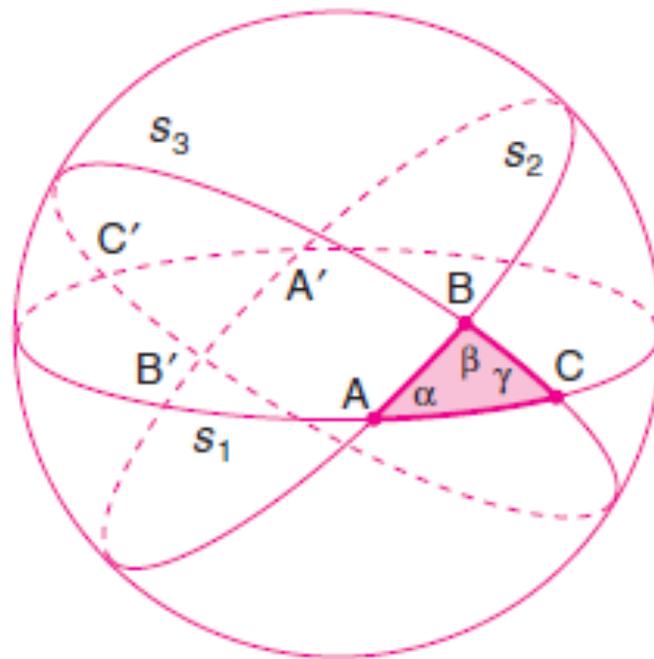


Fra le mostruosità più grandi che questo matematico minore che fu Riemann ha messo al mondo, quella di una linea perfettamente dritta e chiusa in sé è forse la più spassosa. [...]

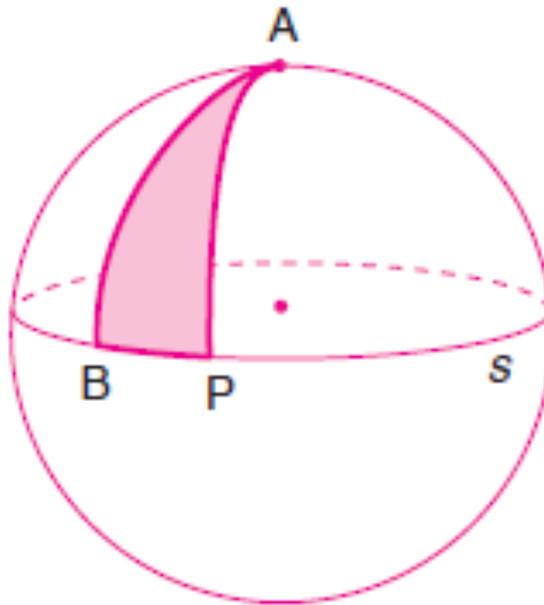
Una delle conseguenze peggiori di questa geometria è il pericolo che si corre se si sputa in linea retta davanti a sé: si rischia infatti che lo sputo vi ricada addosso!

Eugen Dühring (1833-1921)

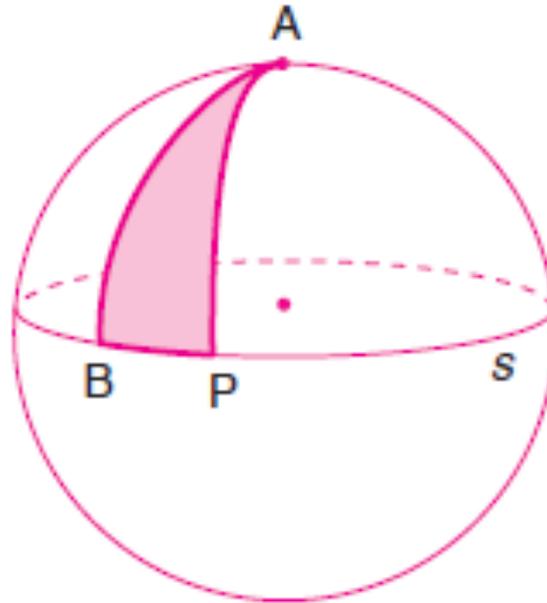
Triangoli gonfi



Triangoli gonfi



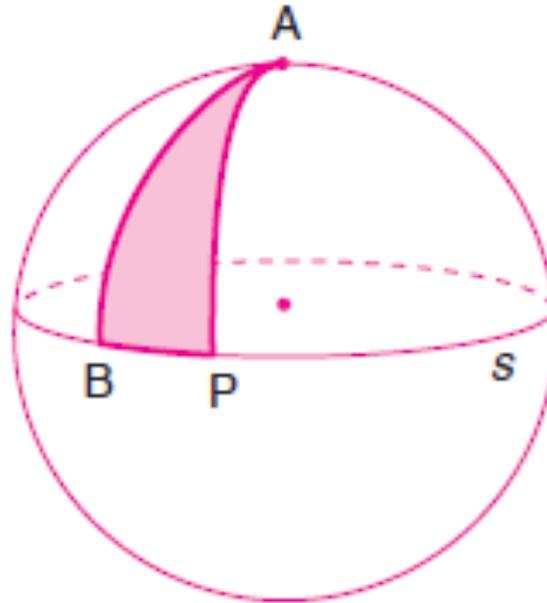
Triangoli gonfi



La somma degli angoli di un triangolo sferico è maggiore di 180°

e

Triangoli gonfi



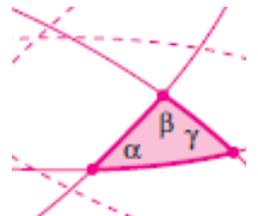
La somma degli angoli di un triangolo sferico è maggiore di 180°

e

Tale somma non è costante, come in geometria euclidea,
ma varia al variare del triangolo

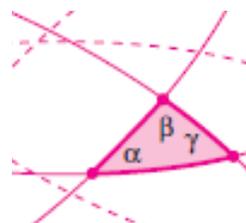
Base · altezza : 2 ???

Base · altezza : 2 ???

Area () = $\alpha + \beta + \gamma - \pi$

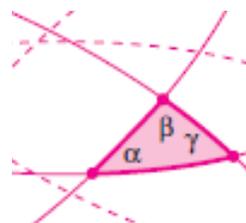
Base · altezza : 2 ???

Teorema dell' **eccesso** di Gauss:

$$\text{Area} \left(\text{triangolo} \right) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$


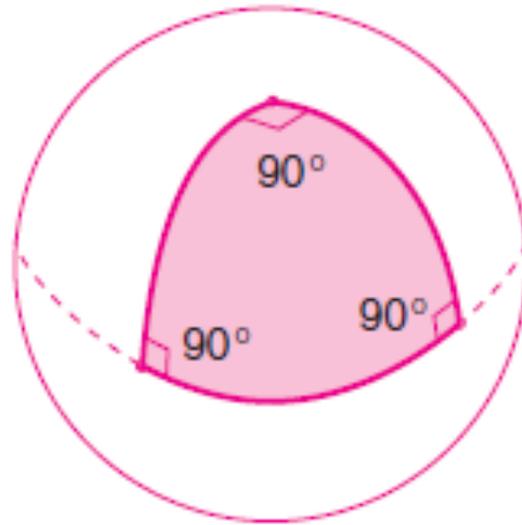
Niente omotetie!

Teorema dell' **eccesso** di Gauss:

$$\text{Area} \left(\text{triangolo} \right) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$


E Pitagora?

E Pitagora?



Formalizziamo?



La costruzione di *una* geometria

La costruzione di *una* geometria



La costruzione di *una* geometria



- Oggetti (termini, enti primitivi)

La costruzione di *una* geometria



- Oggetti (termini, enti primitivi)
- Regole di base (assiomi, postulati)

La costruzione di *una* geometria



- Oggetti (termini, enti primitivi)
- Regole di base (assiomi, postulati)

Geometria = tutte le affermazioni, riguardanti gli oggetti, che si possono ottenere tramite deduzioni logiche a partire dalle regole di base (proposizioni, teoremi)

Molte geometrie



Molte geometrie



Molte geometrie



- Geometria *euclidea*

Molte geometrie



- Geometria *euclidea*
- Geometria *neutrale*

Molte geometrie



- Geometria *euclidea*
- Geometria *neutrale*
- Geometria *iperbolica*
- Geometria *ellittica*

Molte geometrie



- Geometria *euclidea*
- Geometria *neutrale*
- Geometria *iperbolica*
- Geometria *ellittica*
- Geometria *proiettiva*

Molte geometrie



- Geometria *euclidea*
- Geometria *neutrale*
- Geometria *iperbolica*
- Geometria *ellittica*
- Geometria *proiettiva*
- Geometria *della gomma*

Molte geometrie



- Geometria *euclidea*
- Geometria *neutrale*
- Geometria *iperbolica*
- Geometria *ellittica*
- Geometria *proiettiva*
- Geometria *della gomma*
- ...

La matematica è un'opinione???



La matematica è un'opinione???



La domanda: la geometria euclidea è vera?
Non ha assolutamente senso. Possiamo chiederci allora se il sistema metrico decimale è vero e i vecchi sistemi di pesi e misure sono falsi; se le coordinate cartesiane sono vere e quelle polari sono false.
Una geometria non può essere più vera di un'altra, può soltanto essere più comoda.

La matematica è un'opinione???



La domanda: la geometria euclidea è vera?
Non ha assolutamente senso. Possiamo chiederci allora se il sistema metrico decimale è vero e i vecchi sistemi di pesi e misure sono falsi; se le coordinate cartesiane sono vere e quelle polari sono false.

Una geometria non può essere più vera di un'altra, può soltanto essere più comoda.

**«La matematica è la scienza della *libertà*:
la geometria non euclidea è nata non per misurazioni, ma sulla base della
libera scelta umana di negare in maniera non distruttiva».**

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti:
- Regole di base:

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti: punto, linea, superficie,
- Regole di base:

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti: punto, linea, superficie,
retta, angolo, triangolo, quadrilatero, circonferenza, ...
- Regole di base:

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti: punto, linea, superficie,
retta, angolo, triangolo, quadrilatero, circonferenza, ...
- Regole di base:
 - I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;
 - II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;
 - III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;
 - IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti: punto, linea, superficie,
retta, angolo, triangolo, quadrilatero, circonferenza, ...
- Regole di base:
 - I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;
 - II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;
 - III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;
 - IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

+

La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti: punto, linea, superficie,
retta, angolo, triangolo, quadrilatero, circonferenza, ...
- Regole di base:
 - I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;
 - II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;
 - III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;
 - IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

+

Dati una retta r e un punto P non appartenente ad r ,
esiste una e una sola retta passante per P e parallela ad r

Le geometrie *non euclidee*

Le geometrie *non euclidee*

- Oggetti:
- Regole di base:

Le geometrie *non euclidee*

- Oggetti: gli stessi della geometria euclidea (punto, linea, ...)
- Regole di base:

Le geometrie *non euclidee*

- Oggetti: gli stessi della geometria euclidea (punto, linea, ...)

- Regole di base:

I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;

II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;

IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

Le geometrie *non euclidee*

- Oggetti: gli stessi della geometria euclidea (punto, linea, ...)

- Regole di base:

I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;

II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;

IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

+

Le geometrie *non euclidee*

- Oggetti: gli stessi della geometria euclidea (punto, linea, ...)

- Regole di base:

I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;

II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;

IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

+

un postulato che neghi il V postulato euclideo

Dati una retta r e un punto P non appartenente ad r ,
esiste una e una sola retta passante per P e parallela ad r
Playfair

Dati una retta r e un punto P non appartenente ad r ,
esiste una e una sola retta passante per P e parallela ad r

Playfair

N1



Data una retta r e un punto P
non appartenente ad r ,
esiste più di una retta passante
per P e parallela ad r

Dati una retta r e un punto P non appartenente ad r ,
esiste una e una sola retta passante per P e parallela ad r

Playfair

N1

N2

Data una retta r e un punto P
non appartenente ad r ,
esiste più di una retta passante
per P e parallela ad r

Data una retta r e un punto P
non appartenente ad r ,
non esiste nessuna retta
passante per P e parallela ad r

Dati una retta r e un punto P non appartenente ad r ,
esiste una e una sola retta passante per P e parallela ad r

Playfair

N1

N2

Data una retta r e un punto P
non appartenente ad r ,
esiste **hyperbolikós** una e una sola retta passante
per P e parallela ad r

Data una retta r e un punto P
non appartenente ad r ,
non esiste nessuna retta
passante per P e parallela ad r

Dati una retta r e un punto P non appartenente ad r ,
esiste una e una sola retta passante per P e parallela ad r

Playfair

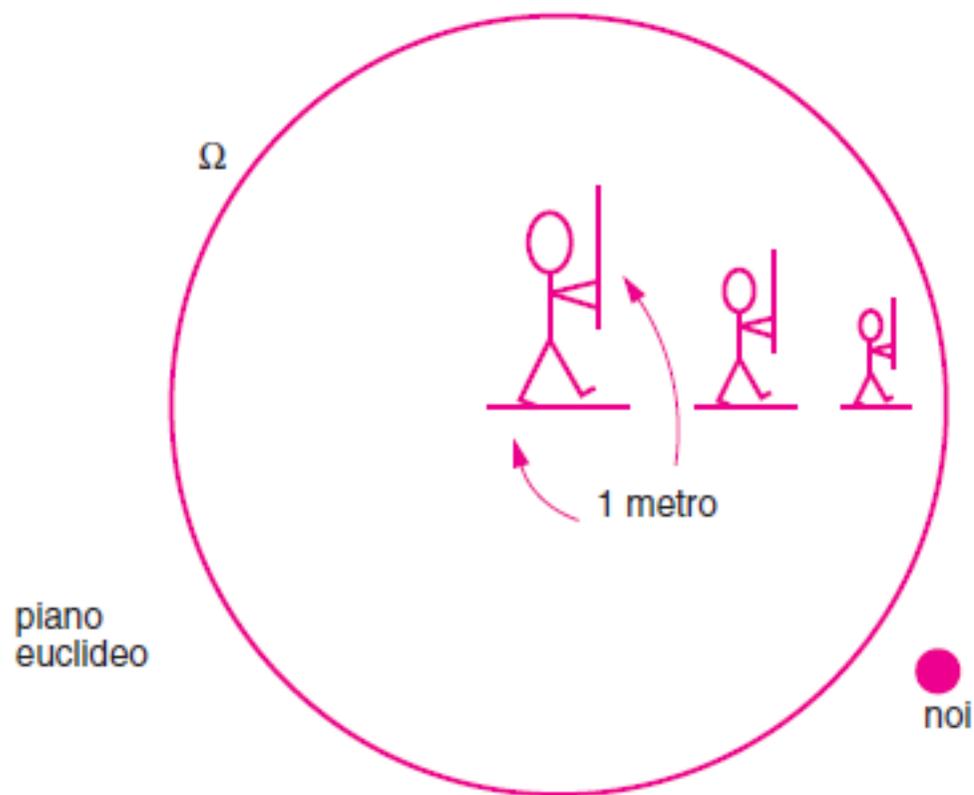
N1

N2

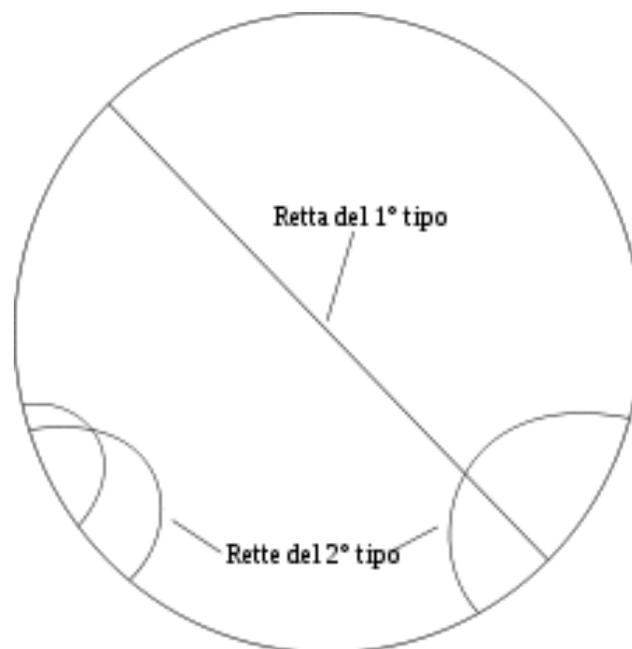
Data una retta r e un punto P
non appartenente ad r ,
esiste **hyperbolikós** una e una sola retta passante
per P e parallela ad r

Data una retta r e un punto P
non appartenente ad r ,
non esiste **elleiptikós** nessuna retta
passante per P e parallela ad r

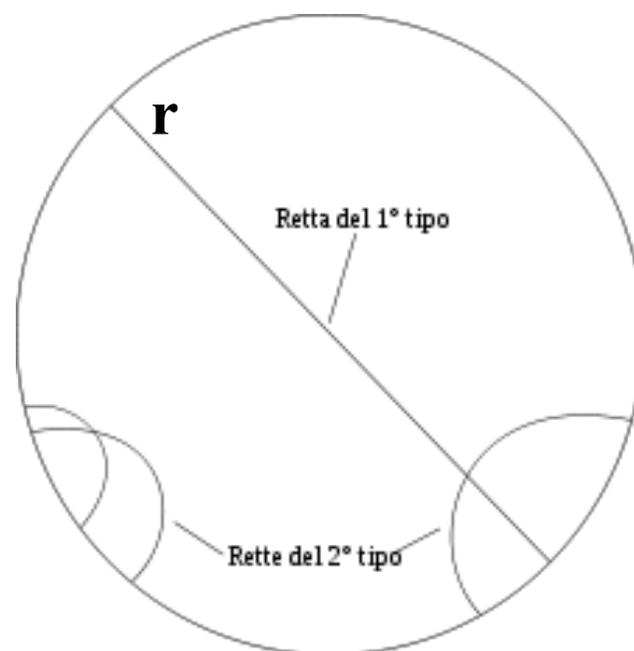
Geometria *iperbolica*: l'omino e il suo mondo di gas



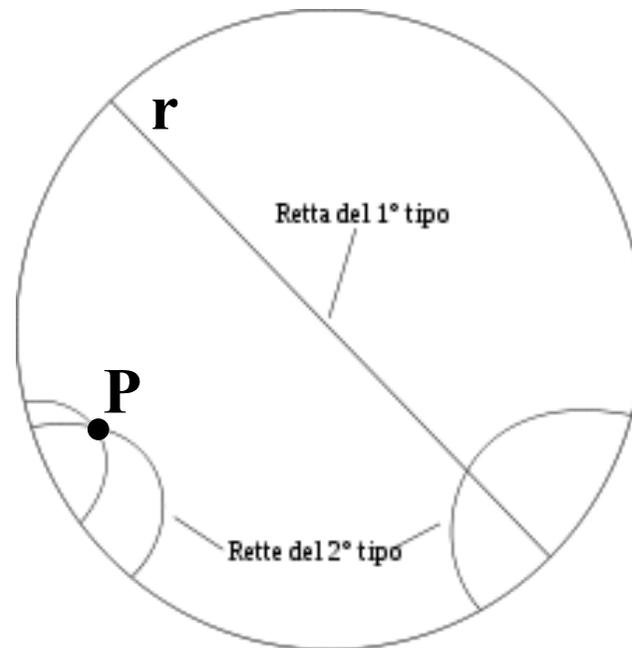
Rette iperboliche



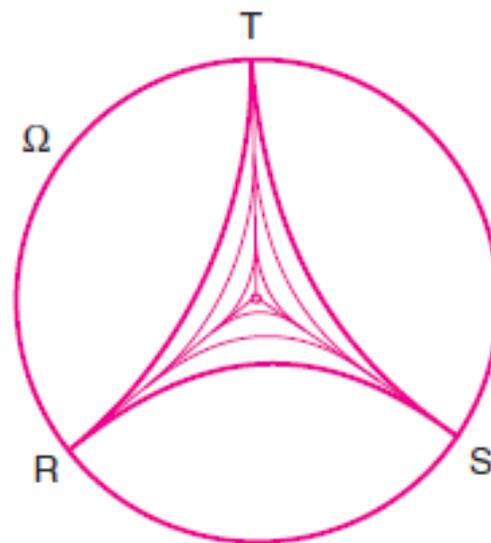
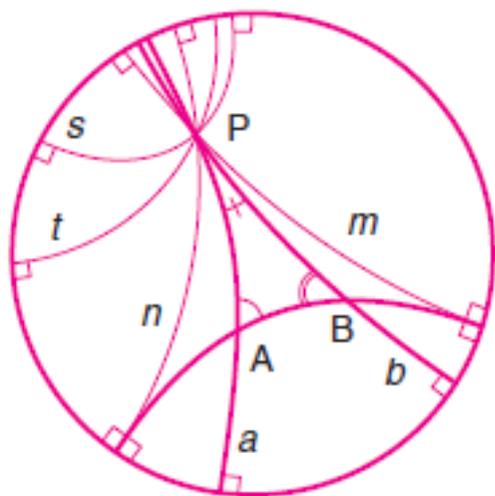
Rette iperboliche



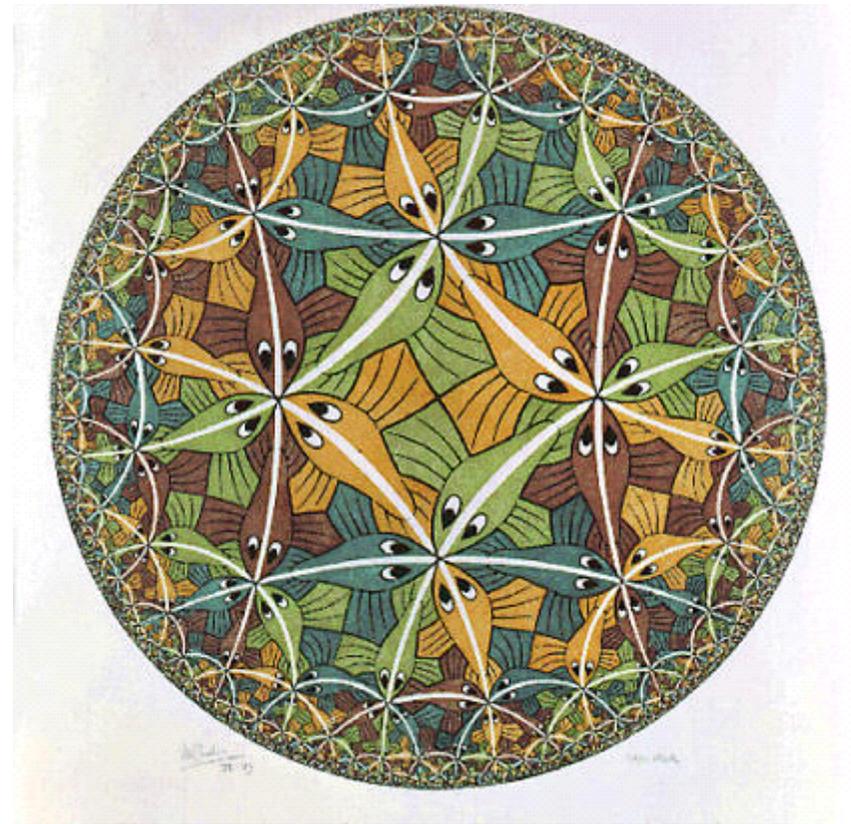
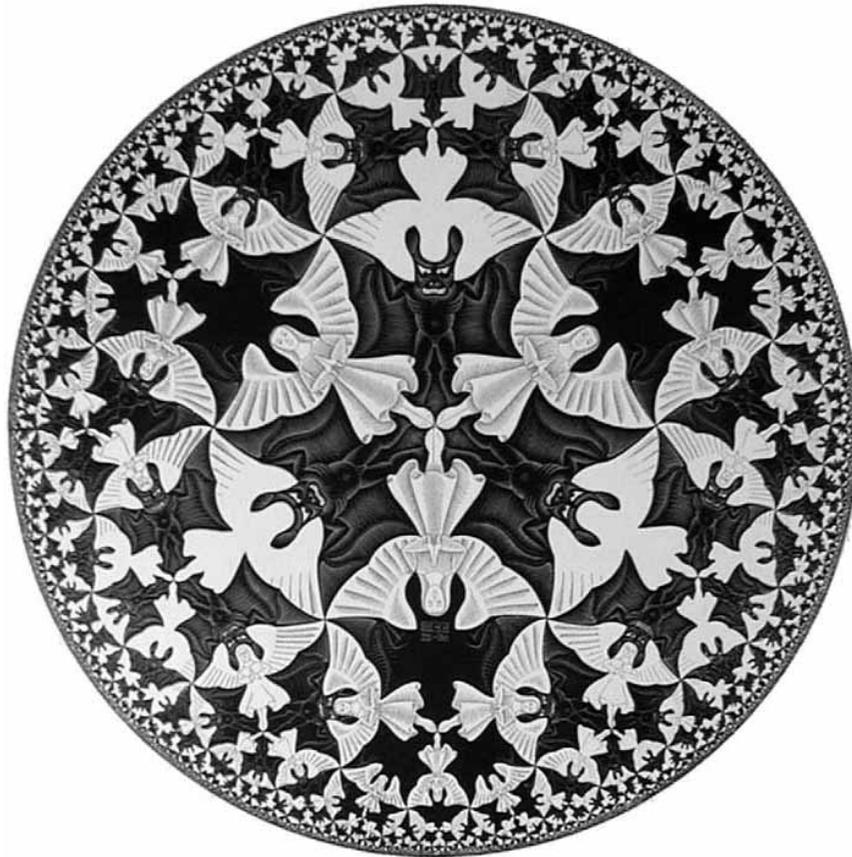
Rette iperboliche



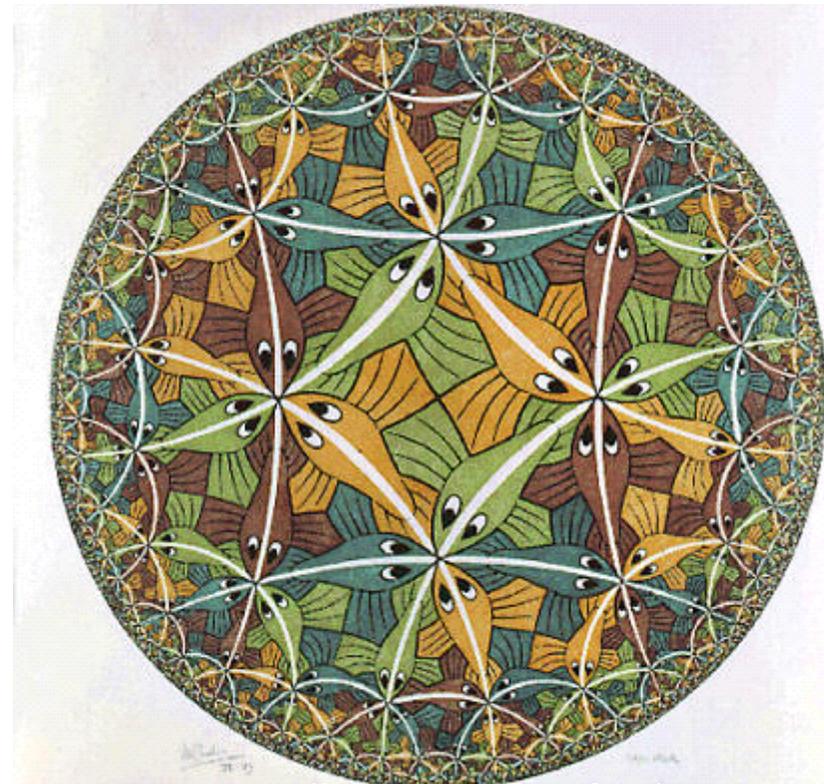
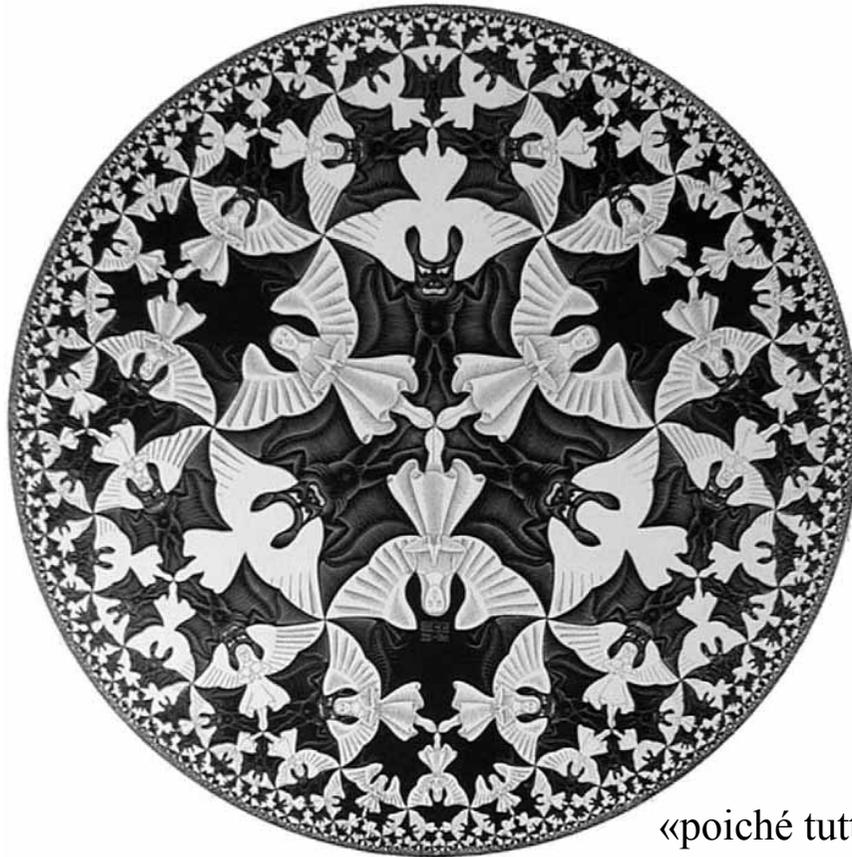
Triangoli sgonfi



Arte iperbolica: Escher



Arte iperbolica: Escher



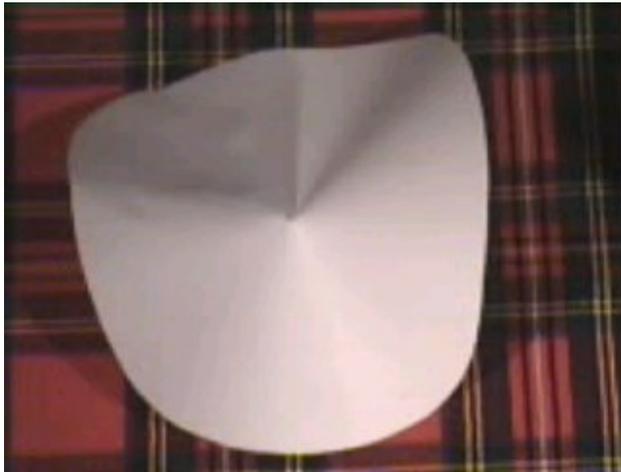
«poiché tutte queste sequenze di pesci balzano fuori come razzi da infinitamente lontano, perpendicolarmente al contorno, e ricadono poi da dove sono venuti, nessuno di loro raggiunge mai il bordo»

Riconoscere punti euclidei, ellittici, iperbolici

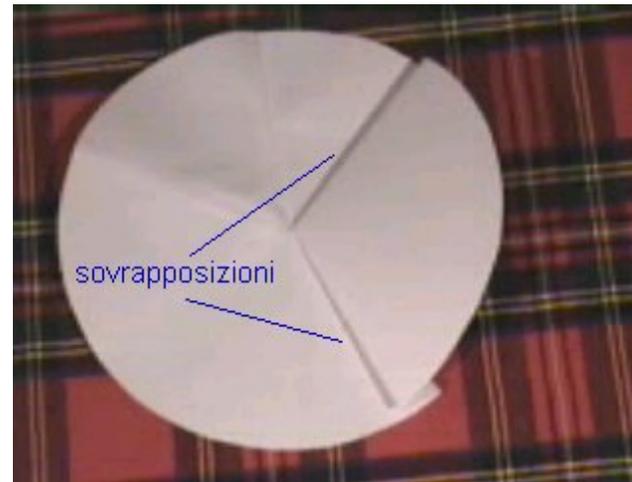


La curvatura, ovvero ...
cosa succede quando spiaccico!

La curvatura, ovvero ... cosa succede quando spiaccico!



La curvatura, ovvero ... cosa succede quando spiaccico!



A cosa serve tutto ciò???



Il telescopio mentale



Perché il problema è così difficile?

n dimensioni

obbligatorietà del
punto di vista *intrinseco*

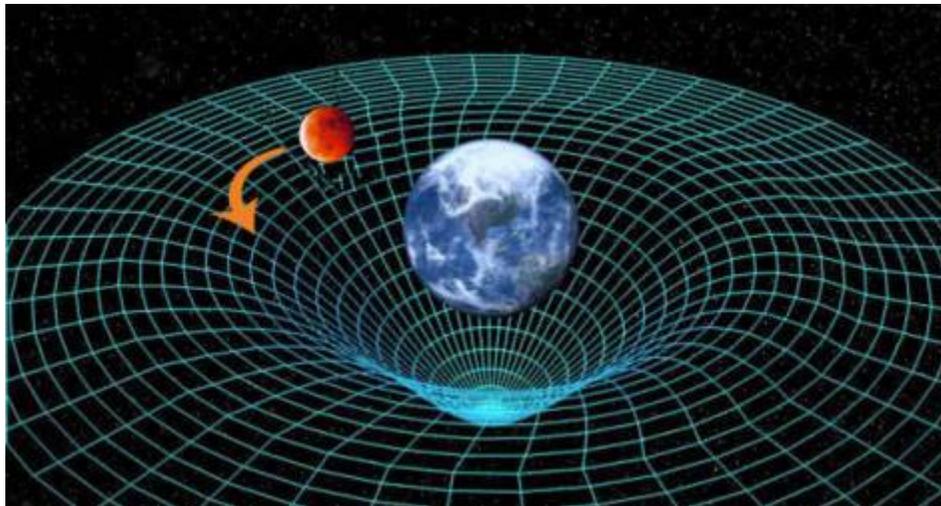
Generalizzazione del concetto di curvatura per oggetti di dimensione n

Esiste e costituisce lo spartitraffico tra 3 geometrie: *ellittica, piatta e iperbolica*

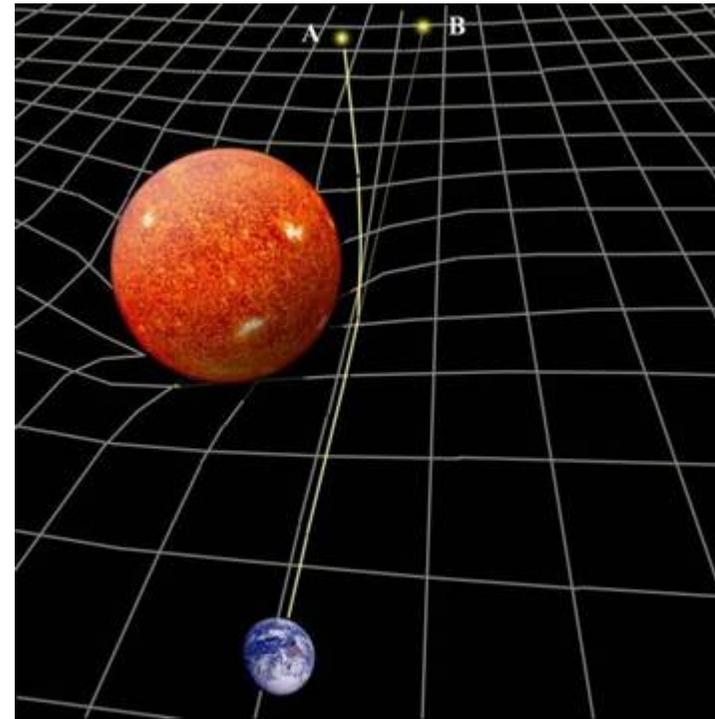
La curvatura è comunque una grandezza intrinseca

I prototipi sono tre e generalizzano quelli visti per le superfici:
 S^n, E^n, H^n

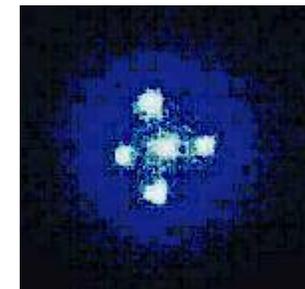
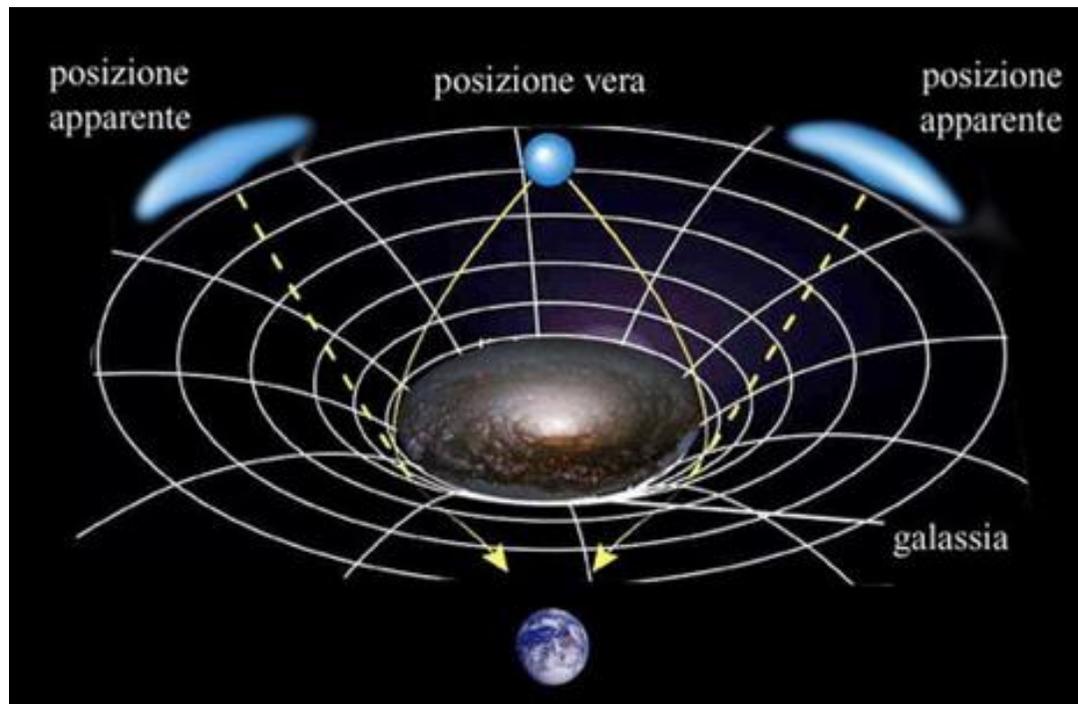
Einstein: la gravità è geometria



la presenza di massa ed energia
curva lo spazio



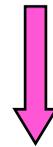
Lenti gravitazionali e croci di Einstein



Forma dell'universo a grande scala: possibili soluzioni delle equazioni della relatività generale

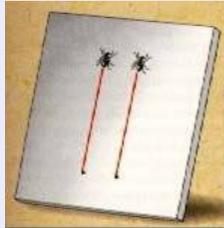
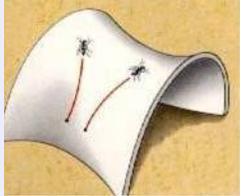
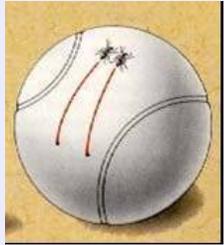
Principio cosmologico: l'universo a grande scala è omogeneo e isotropo

*tensora energia - impulso = funzioni del *tensora di Ricci**



- 1) l'universo non è statico ma si evolve, cambiando le sue dimensioni nel tempo (contraendosi o dilatandosi);
- 2) la geometria dell'universo a grande scala è curva e l'usuale geometria euclidea è solo un caso particolare tra le ∞ geometrie non euclidee che si ottengono come soluzioni delle equazioni.

Densità critica, forma e destino dell'universo (con $\Lambda = 0$)

	geometria	prototipo	Destino
densità universo = densità critica	euclidea		espansione che rallenta e termina dopo un tempo infinito (cioè mai)
densità universo < densità critica	iperbolica		espansione infinita
densità universo > densità critica	ellittica		fine dell'espansione e collasso (big crunch)

Il problema dell'inventario

$$d_c = (1,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

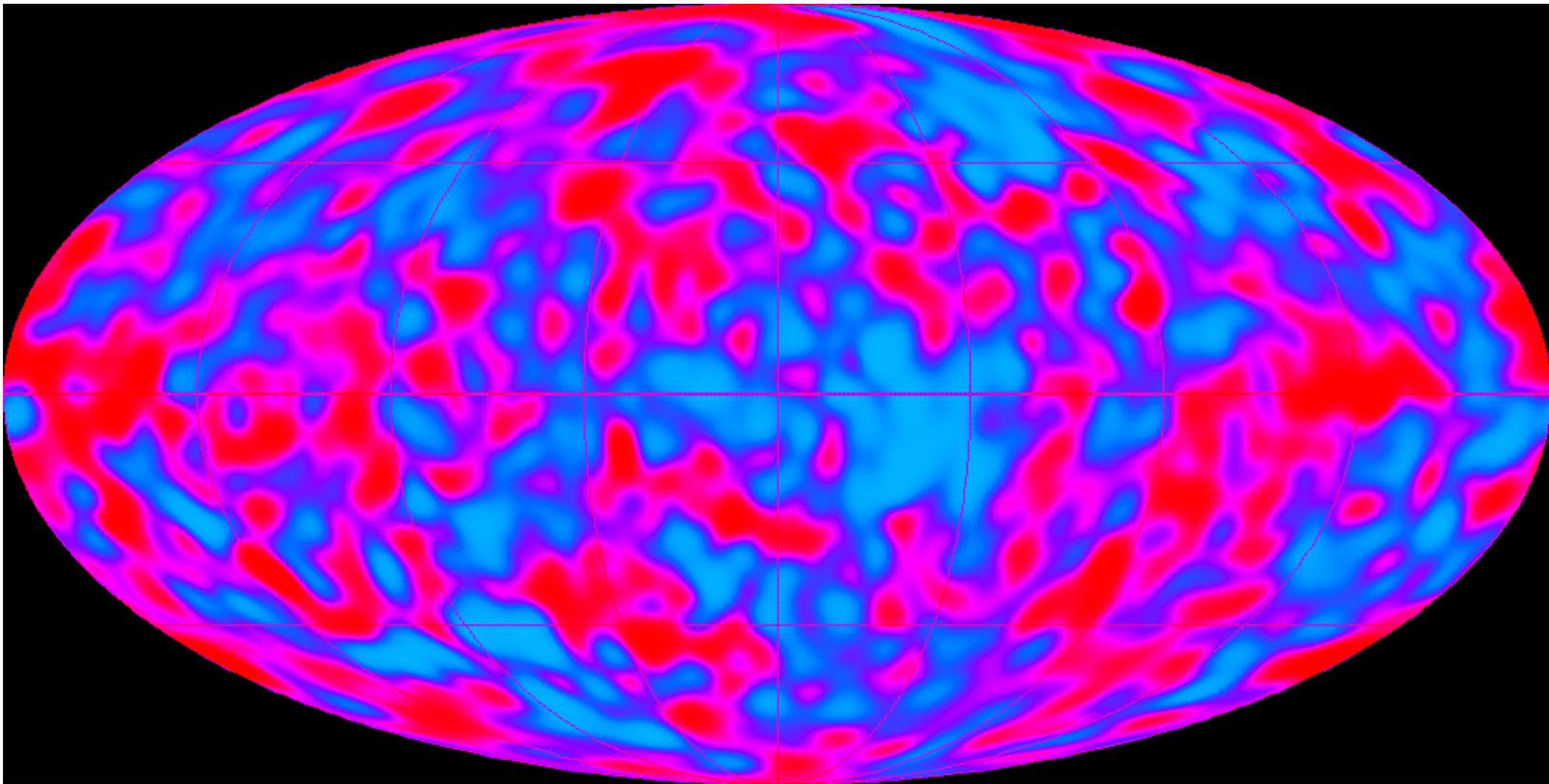
Il problema dell'inventario

$$d_c = (1,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

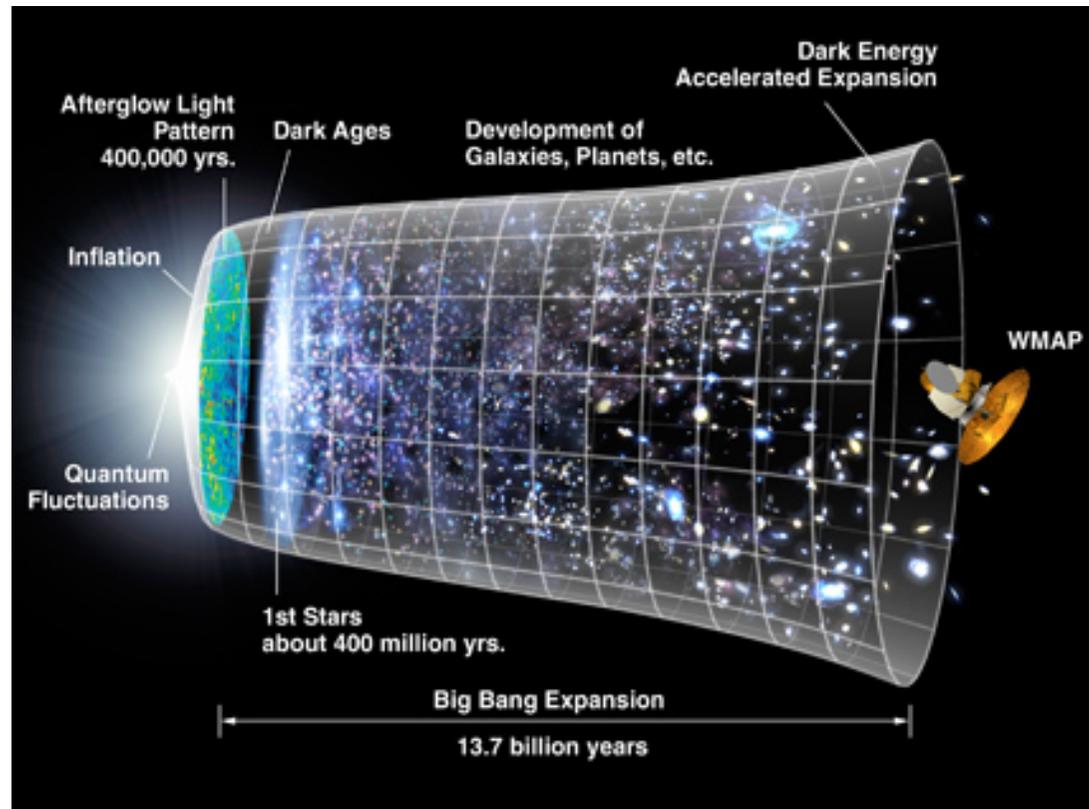
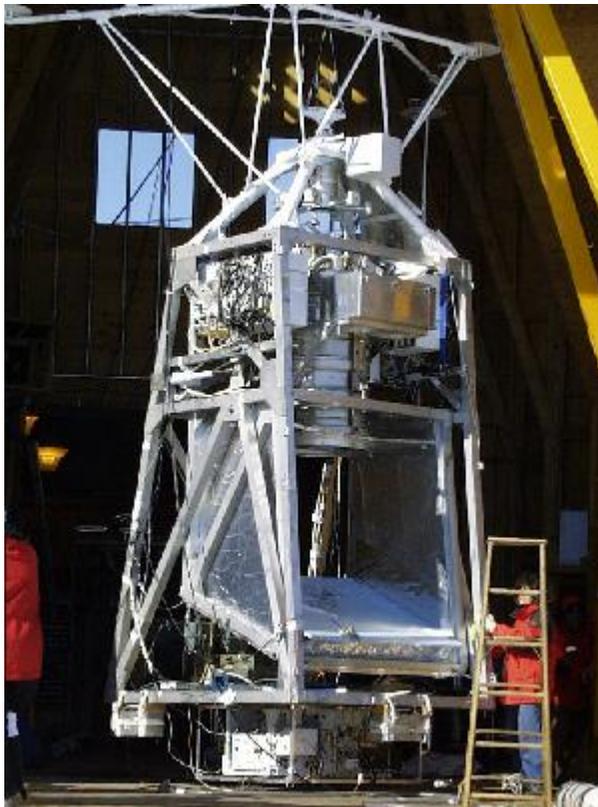
Materia *oscura*

Energia *oscura*

Telescopio o macchina del tempo?



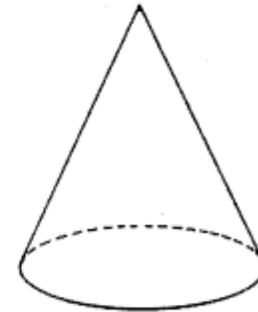
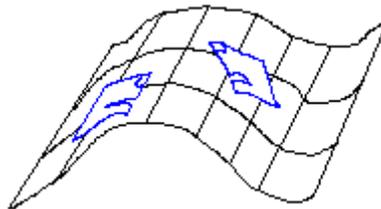
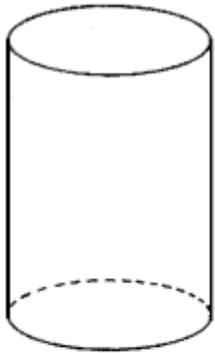
BOOMERANG, MAP e gli altri: l'universo è piatto?



**E quindi a cosa servono, in questo
contesto, le geometrie non euclidee?????**



È euclideo ... ma che forma ha???

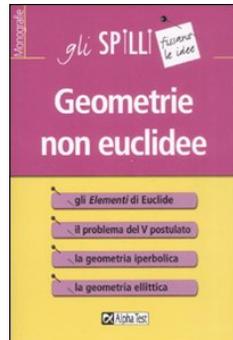


Dalle recenti osservazioni sperimentali ...

Dalle recenti osservazioni sperimentali ...



Bibliografia



GEOMETRIE NON EUCLIDEE, *Silvia Benvenuti*, Alpha test, Gli Spilli.

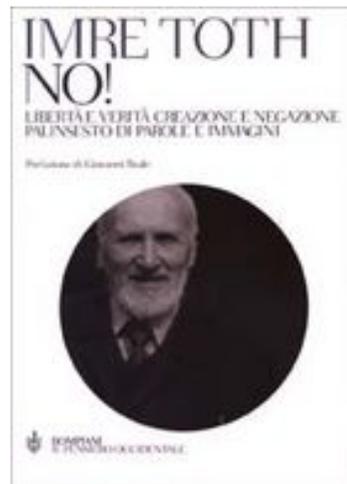
DIMENTICARE EUCLIDE?, *Silvia Benvenuti*, Linx Magazine n.08/2011, p. 16-23.

LE GNE E LA FORMA DELL'UNIVERSO, *Silvia Benvenuti*, <http://linxedizioni.it/>.

INSALATE DI MATEMATICA 3. SETTE VARIAZIONI SU ARTE, ARCHITETTURA E DESIGN, *Silvia Benvenuti*, Sironi.

IL TELESCOPIO MENTALE: COSA POSSIAMO DIRE SULLA FORMA DELL'UNIVERSO?, *Silvia Benvenuti*, in MaTeinItaly. Scopri la matematica del futuro, Egea, 2014.

IL GEOMETRICON, *Jean-Pierre Petit*, Dedalo.



POESIA DELL'UNIVERSO. L'ESPLORAZIONE MATEMATICA DEL COSMO, *Robert Osserman*, Tea.

THE FOURTH DIMENSION AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRY IN MODERN ART, *Linda Henderson*, MIT Press.

NO! LIBERTÀ E VERITÀ, CREAZIONE E NEGAZIONE, *Imre Toth*, Bompiani.

