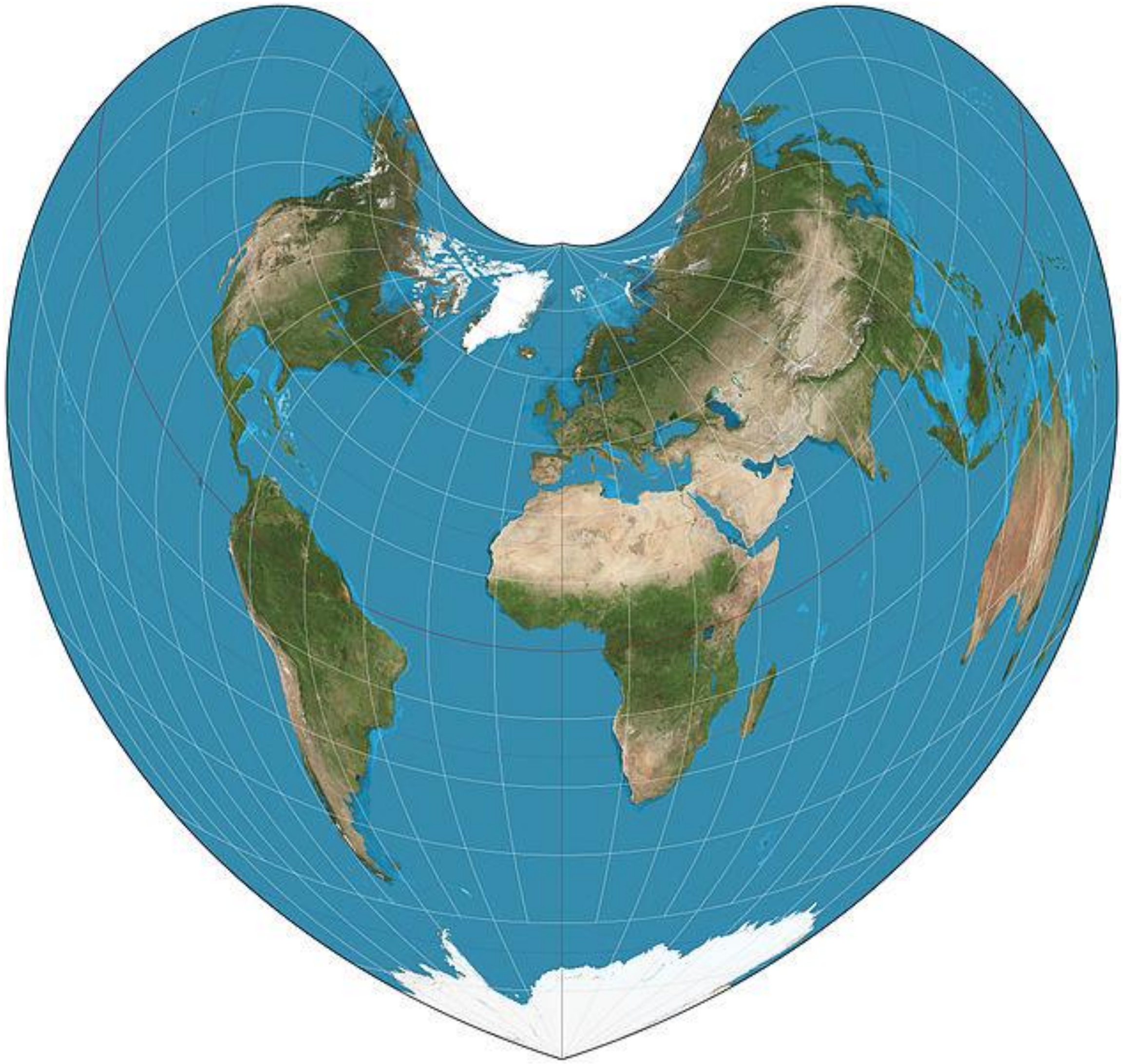
NON SOLO CARTE GEOGRAFICHE!

Gilberto Bini
Università degli Studi di Milano
Dipartimento di Matematica
Centro *matematita*
Email: gilberto.bini@unimi.it

LE CARTE GEOGRAFICHE

Rappresentazione ridotta, approssimata e simbolica, in piano, di tutta la superficie terrestre o di parte di essa. Altre rappresentazioni cartografiche tridimensionali, come i globi e i plastici a rilievo, condividono con la carta geografica l'insieme della definizione, salvo il riferimento al piano bidimensionale.

Enciclopedia Treccani online

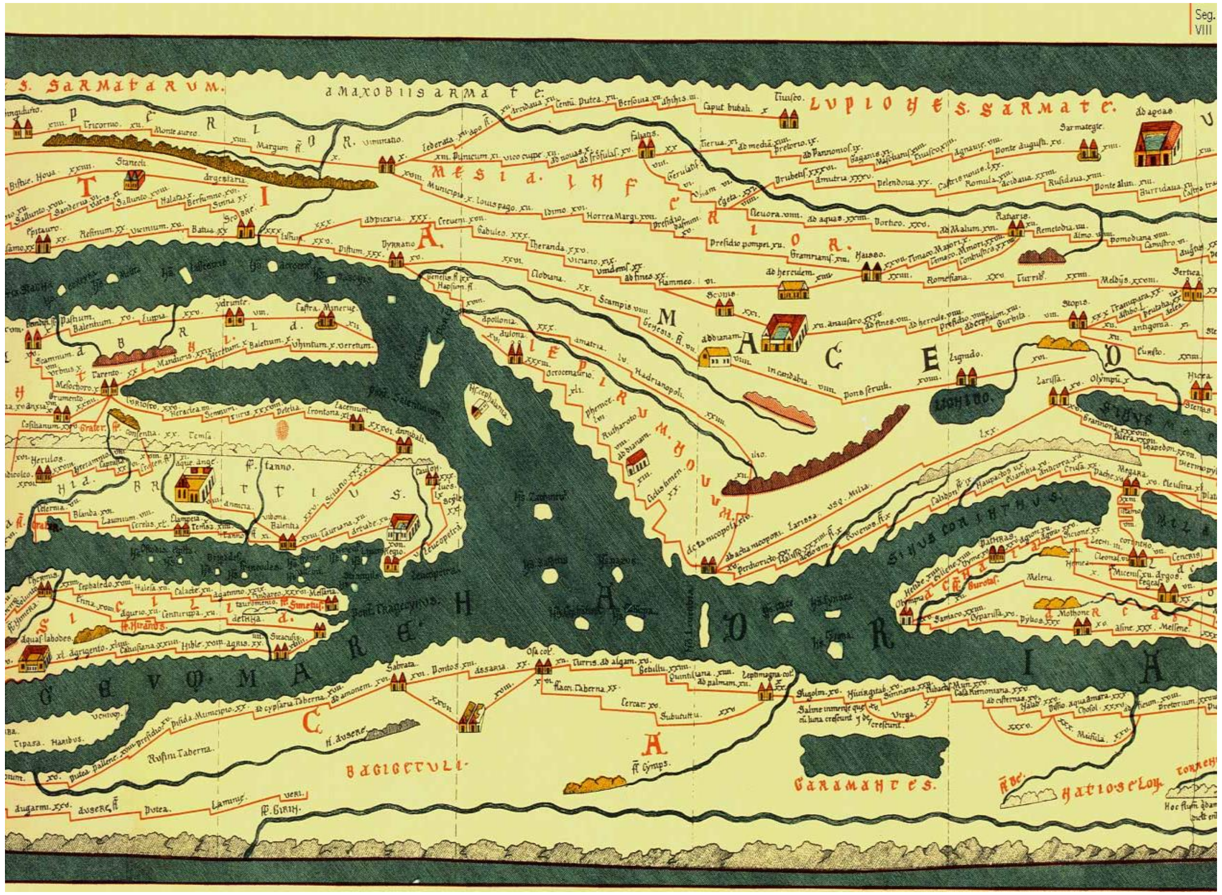


DALL'ANTICHITÀ...

La rappresentazione cartografica più antica è del 6.200 a.C.

La concezione geometrica da cui deriva la cartografia moderna proviene dalla Grecia antica del VI secolo a.C.

Il più importante documento cartografico d'epoca romano è la grande *Tabula Peutingeriana*, pervenuta sotto forma di copia medievale di un originale del IV secolo d.C.



… AI GIORNI NOSTRI….

- Non importano le distanze.
- Nozione di «intorno».
- Nozione di «dentro/fuori» rispetto a una curva chiusa che non ha incroci.
- Quante sono le regioni formate da un «pezzo» solo?
- Abilità matematiche per leggere la *rete metropolitana*.

PASSANDO PER IL MEDIOEVO…

Fu l’astronomo e geografo Tolomeo a impostare il problema della costruzione di una proiezione geografica.

Tipiche del Medioevo sono le *mappae mundi*. Mappamondi complessi compaiono dopo il Mille, arricchiti di informazioni ricavate da pellegrini, crociati e mercanti.

MAPPE, PIANTE O CARTE?

- La scala è definita come il rapporto fra una distanza lineare misurata sulla carta, e pertanto in piano, e la corrispondente distanza reale sulla superficie terrestre, e pertanto su una superficie curva!

- Ad esempio, 1:25.000 vuol dire che ogni distanza è stata ridotta 25.000 volte.

- Mappa: scala maggiore di 1:2.000.

- Piante: scala tra 1:2.000 e 1:15.000.

- Carte: topografiche (tra 1:15.000 e 1:100.000), corografiche (tra 1:100.000 e 1:1.000.000), geografiche (maggiore di 1:1.000.000), planisferi e mappamondi.

RAPPORTI E PROPORZIONI

La cartina in scala è un modello concreto per applicare e comprendere in pratica il concetto di rapporto e di proporzione.

Le carte offrono anche spunti per percorsi trasversali con altre materie.

Riprendere e confrontare le cartine della metro con quelle geografiche:

- Importano le distanze!
- Forniscono un modello per la rappresentazione della realtà.

LATITUDINE E LONGITUDINE

Rappresentano un sistema di coordinate geografiche: il numero minimo di parametri indipendenti per individuare la posizione geografica di un punto sulla superficie terrestre.

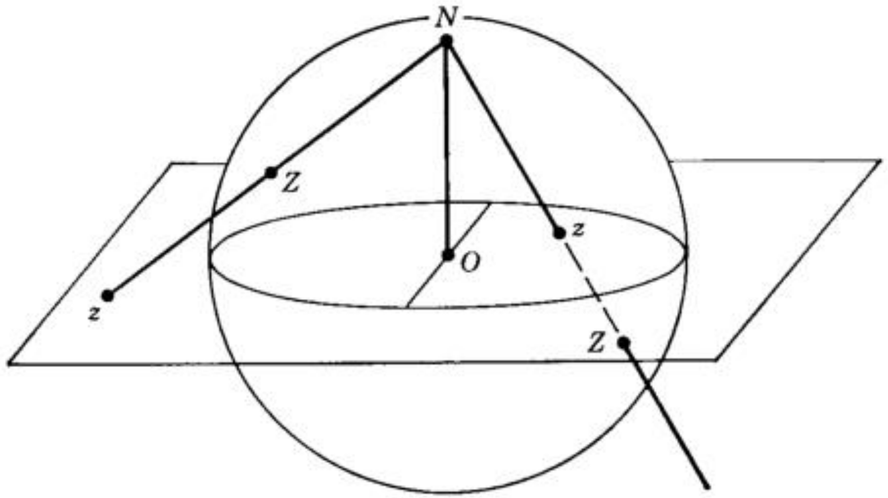
Se vogliamo proiettare su un piano, abbiamo bisogno di una proiezione, cioè una trasformazione dalle coordinate quali la latitudine e la longitudine alle coordinate sul piano.

Indicate le prime con a e b e le seconde con X e Y, abbiamo in generale una legge della forma

$$X=X(a,b), \qquad Y=Y(a,b).$$

LA PROIEZIONE STEREOGRAFICA

Luce dal Polo Nord!



Una vista dal Polo Sud!

...IN FORMULE...

Proiezione dal punto (0,0,1) di una sfera con raggio unitario di centro (0,0,0):

$$X(a,b) = \frac{\cos(a)\cos(b)}{1-\sin(a)}\ , \qquad Y(a,b) = \frac{\cos(a)\sin(b)}{1-\sin(a)}\ ,$$

dove a varia in [-90^0, 90^0) e b in [-180^0,180^0].

PLANISFERI E MAPPAMONDI

Le proiezioni cartografiche possono essere costruite per conservare alcune proprietà:

- equivalente (mantiene i rapporti fra le aree);
- conforme (mantiene gli angoli);
- equidistante (mantiene i rapporti fra le distanze da un punto).

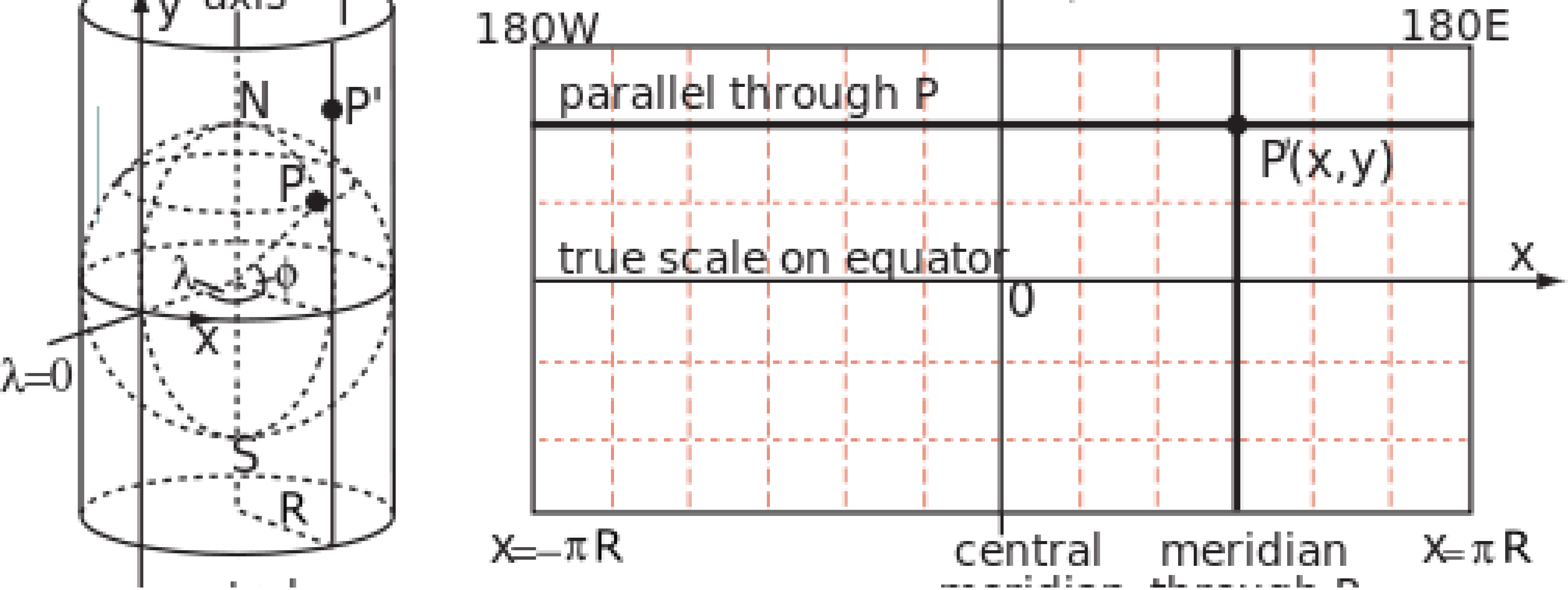
Quale proiezione è la migliore?

UNA MOLTO FAMOSA!?

$$X(a,b)=R(b-b^*),$$

$$Y(a,b)=R\ \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\right].$$

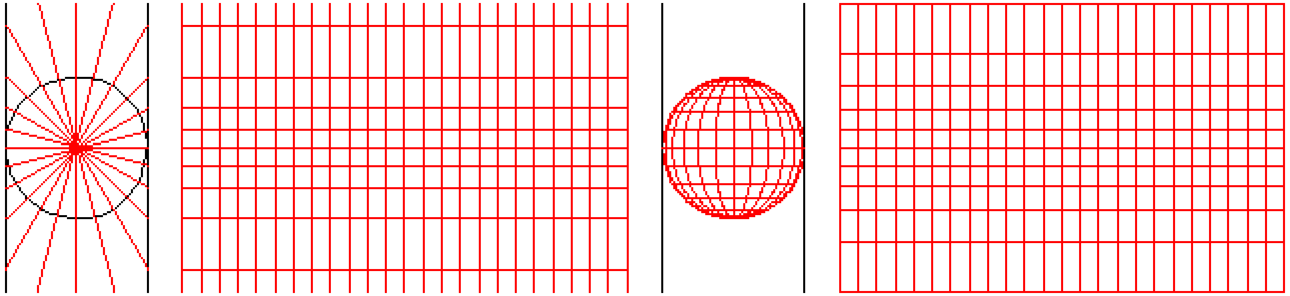
Di che proiezione si tratta?



PROIEZIONE DI MERCATORE?

NO

PROIEZIONE DI MERCATORE (1569)



KARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

- Algebra.
- Astronomia.
- Geodesia.
- Statistica
- Geometrie non-euclidee.
- Geometria differenziale.
- Elettromagnetismo.

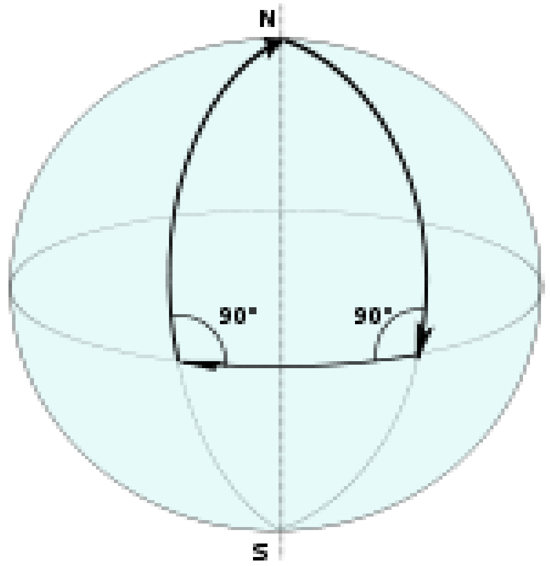
LA CURVATURA

- Curvatura *intrinseca.*
- Curvatura *estrinseca.*

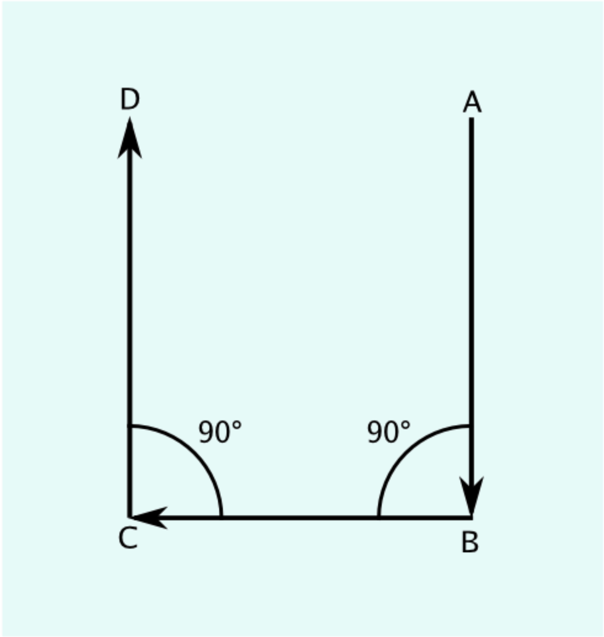
- Curvatura del cilindro e del piano?
- Curvatura della sfera e del piano?

CURVA O PIANA?

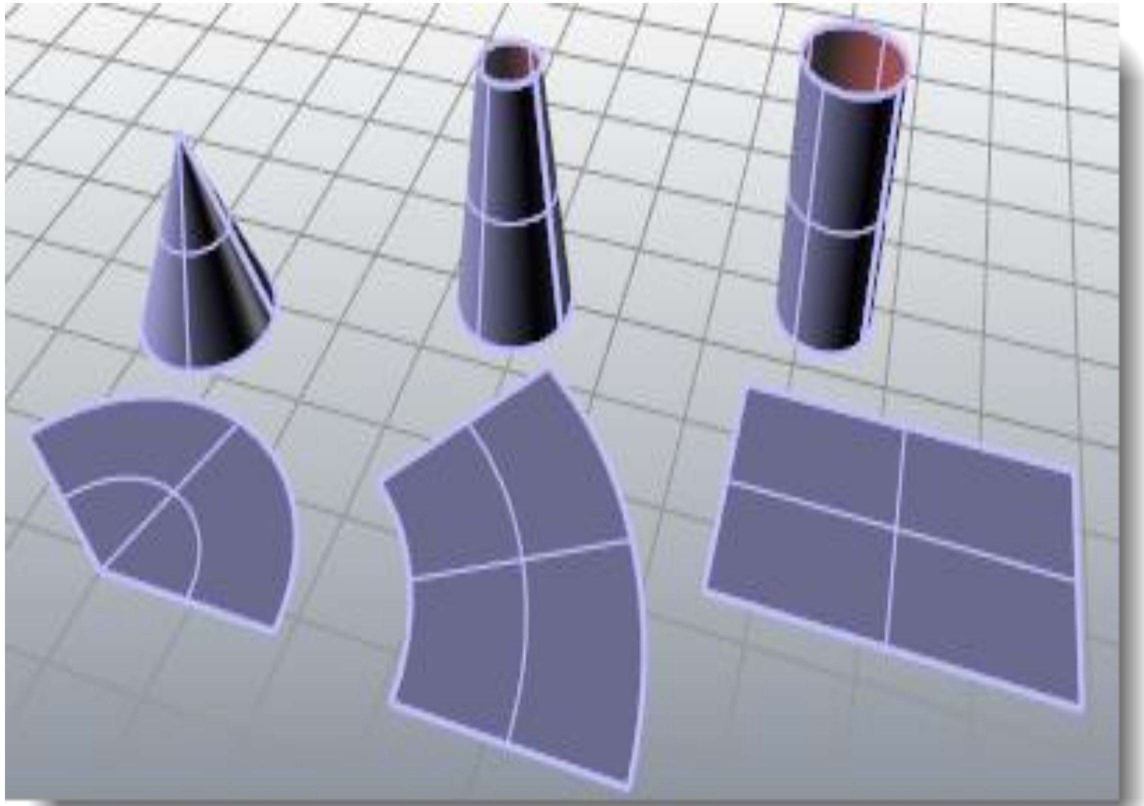
Sulla sfera



Sul piano



SVILUPPIAMO SUL PIANO



Un cono, un tronco di cono e un cilindro aderiscono sul piano se sviluppati lungo una generatrice.

Sono curvi o non lo sono?
Questo il dilemma!

THEOREMA EGREGIUM (1828)

Gauss introduce la curvatura Gaussiana, una quantità intrinseca che misura quanto ‘curva’ è una superficie.

Ne fornisce un modo per calcolarla in base a come si calcolano angoli e distanze sulla superficie.

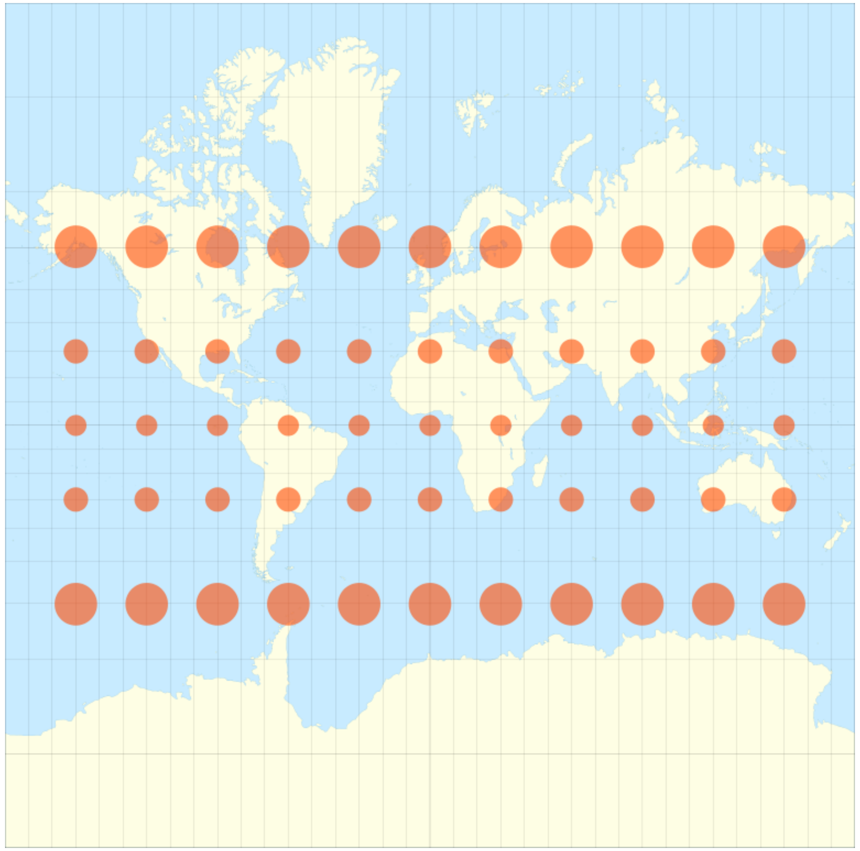
Il teorema afferma che la curvatura Gaussiana non dipende dal modo in cui la superficie è immersa nello spazio ambiente.

La sfera di raggio unitario ha curvatura Gaussiana uguale a 1.

INDICATRICE DI TISSOT

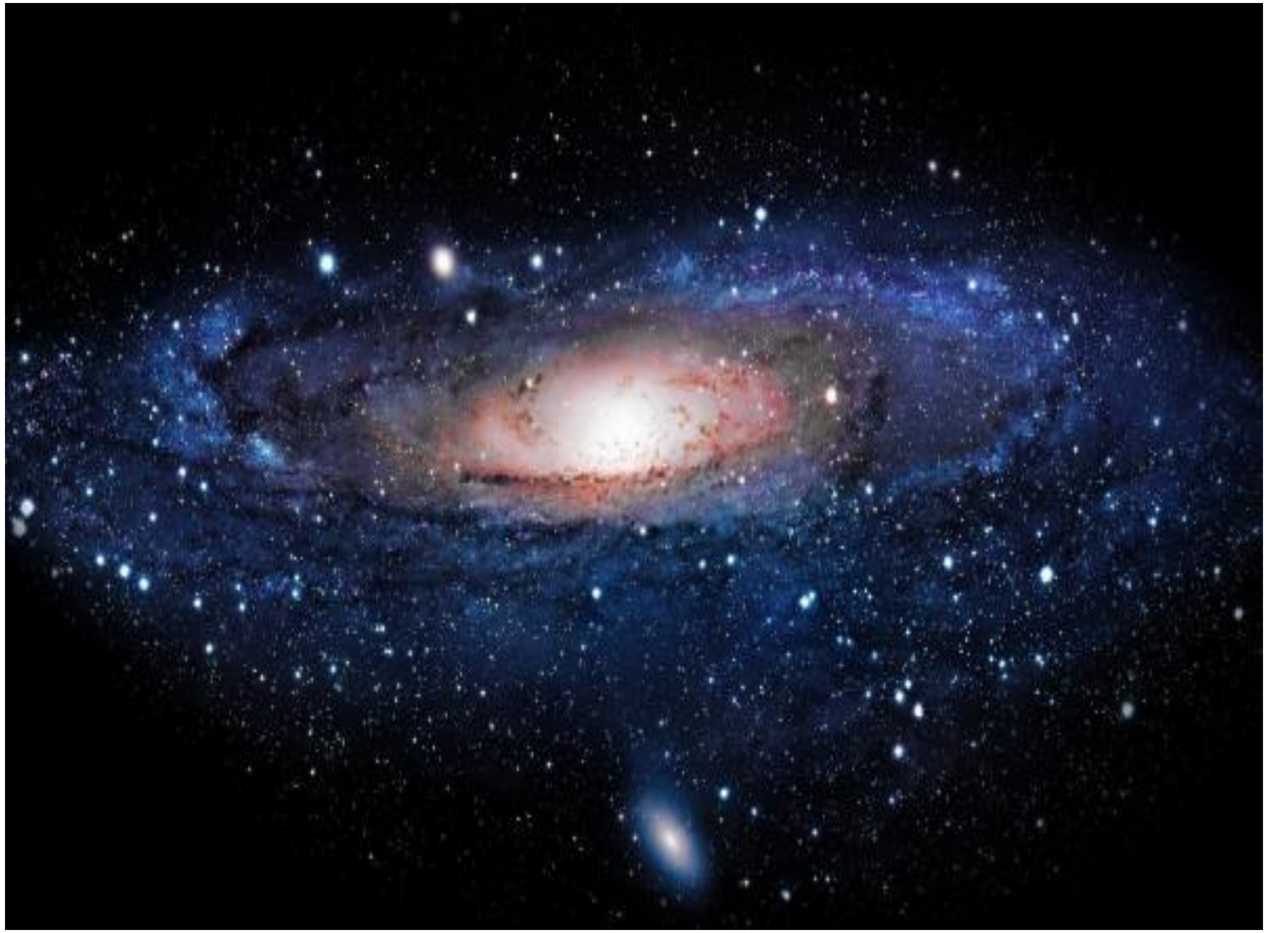
Come ci accorgiamo delle effetti di deformazione?

Mediante le indicatrici di Tissot.



E UN'IPOTETICA CARTA DELL'UNIVERSO?

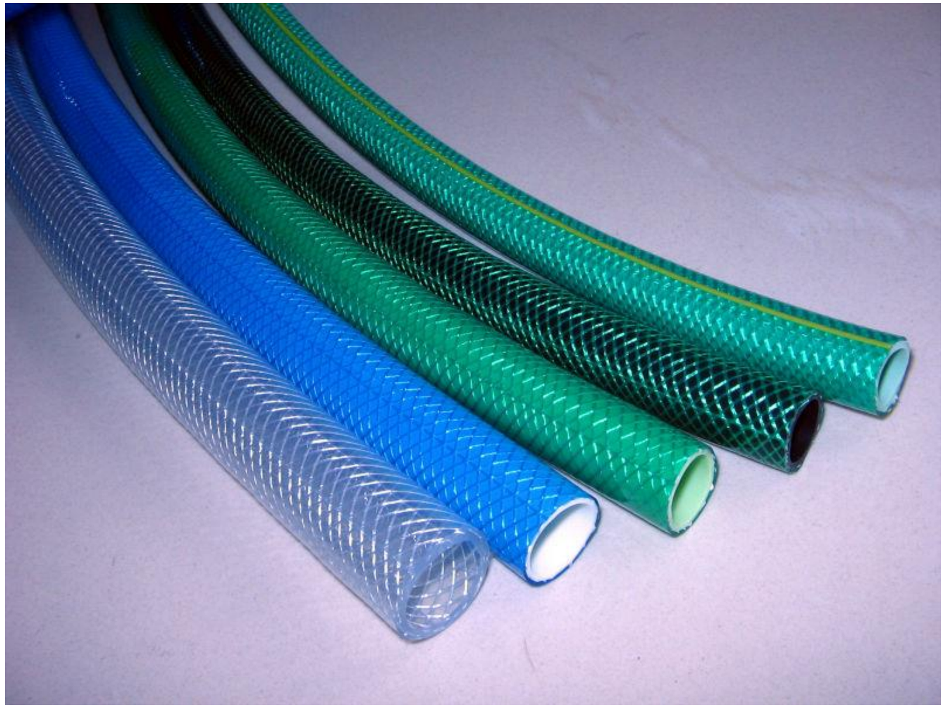
- Possiamo descriverlo localmente.
- Non conosciamo la forma dell'Universo.
- Spazio.
- Tempo.
- Dimensioni nascoste?



LE DIMENSIONI DEL TUBO!

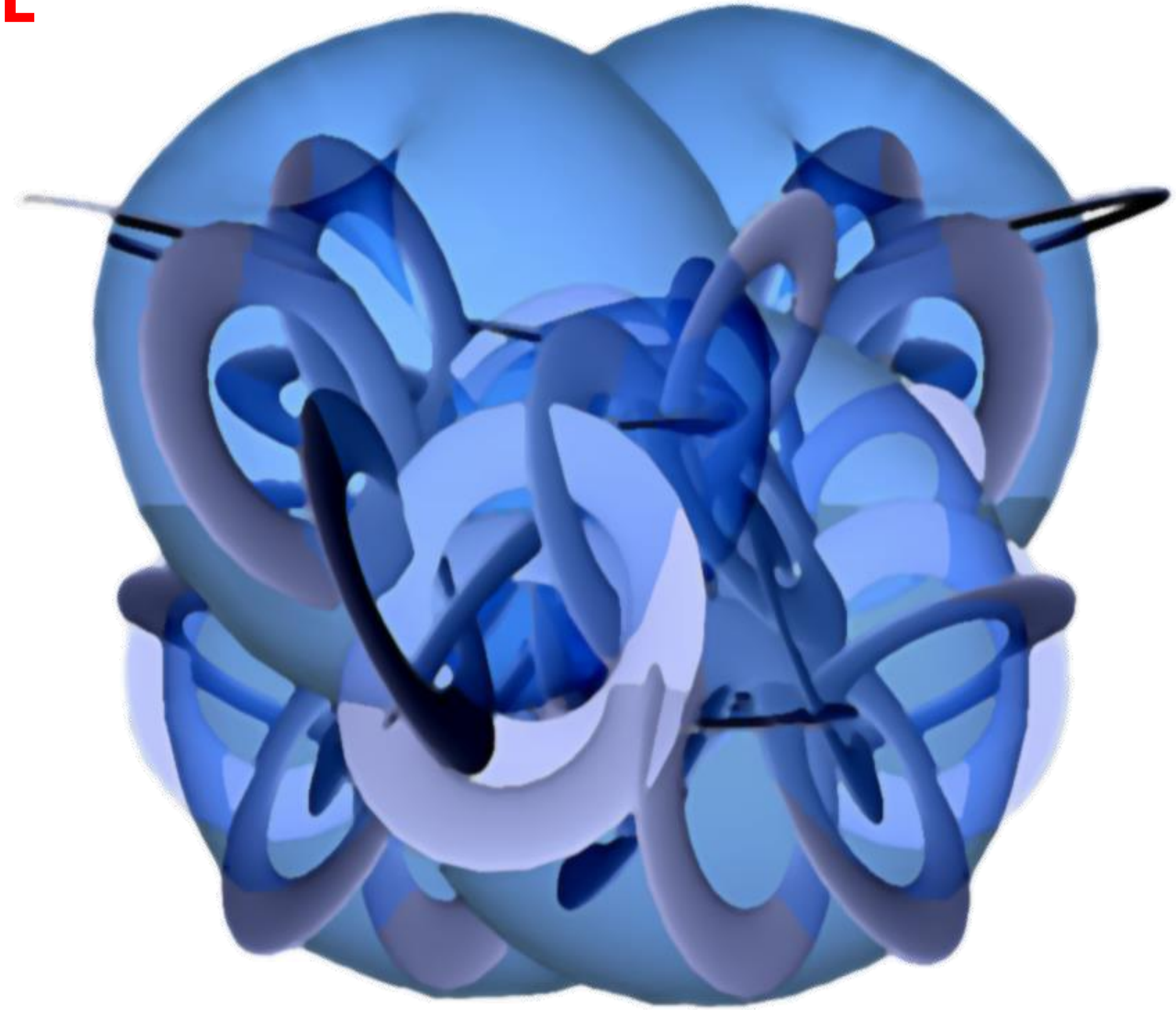
Ci sono…

… ma non si vedono!



CALABI-YAU ARROTOLATE

Le extra-dimensioni si ‘arrotolano’ su enti geometrici sempre più studiati da matematici e fisici negli ultimi anni: le cosiddette *varietà di Calabi-Yau.*



I PROTAGONISTI

- Eugenio Calabi (1923--) congettura nel 1964 l'esistenza di questi enti geometrici (congettura di Calabi).

- Shing-Tung Yau (1949--) ne mostra l'esistenza e perciò vince la medaglia Fields nel 1977.

- Edward Witten (1951--) ha proposto dati numerosi contributi all'applicazione delle Calabi-Yau in Fisica teorica.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. G. Bini, Quale proiezione verso il futuro? *MaTeInItaly. Scopri la matematica del mondo*, Egea 2015.
2. J. Pierre Bourguignon, La curvatura dello spazio: da Gauss a Perelman…, *Xlatangente* **33 (2012) 27-29.**
3. E. Busser, Karl Friedrich Gauss, un matematico che ha fatto la storia, *Xlatangente* **33 (2012) 30-31.**