La curvatura dello spazio: da Gauss a Perelman...

di JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

Gauss ha cominciato a occuparsi della geometria delle superfici a partire dal suo interesse per la geodesia e dai suoi tentativi di descrivere la forma della Terra senza osservarla dall'esterno, ma cogliendo il punto di vista di un abitante. In questo modo, è arrivato al concetto di curvatura. Dai lavori di Riemann alla soluzione della congettura di Poincaré – passando per la teoria della relatività generale di Einstein – la curvatura è diventata un concetto fondamentale in matematica

Questo articolo è tratto dal seminario tenuto da Jean-Pierre Bourguignon il 10 febbraio 2010 alla Biblioteca Nazionale di Francia nel ciclo di conferenze "Un testo, un matematico".

È il 1827 e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) tiene una conferenza su un argomento che rivoluzionerà il modo di studiare le superfici e, più in generale, lo spazio. Il contenuto di tale relazione verrà pubblicato in una memoria del 1828 – una delle sue opere più importanti – dal titolo: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Questo testo diventerà una referenza fondamentale perché introduce un concetto originale, completamente innovativo rispetto alla tradizione precedente: quello di curvatura intrinseca di una superficie. Per la prima volta vengono utilizzati degli strumenti che permettono di intravvedere delle geometrie non euclidee. A tale scopo, il testo di Gauss fornisce dei modelli di rappresentazione geometrica decisamente inaspettati.

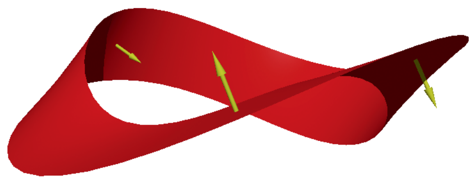
La prima idea rivoluzionaria, che Gauss aveva già compreso sin dal 1794, è quella di definire un'applicazione da una qualsiasi superficie orientabile e liscia *S* – immersa nello spazio tridimensionale – alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, detta appunto *applicazione di Gauss*. Dire che *S* è *liscia* significa che, in ogni punto *P*, la superficie si può approssimare – nelle vicinanze di *P* – con un piano detto *piano tangente*. La retta perpendicolare a tale piano passante per *P* si chiama retta *normale*. Tale normale individua due semirette con origine il punto *P*. Ci piacerebbe trovare un modo per distinguere fra queste due semirette dicendo che una punta "da una parte" e una "dall'altra" (rispetto alla superficie S). Ad esempio, se S fosse un piano orizzontale, potremmo distinguere (uniformemente nei diversi punti della superficie)

Jean-Pierre Bourguignon
Nato nel 1947, già direttore di ricerca presso il CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique), è direttore dell'IHES (Institut des Hautes Études Scientifiques) e professore presso l'École Polytechnique. Dal 1995 al 1998 è stato presidente dell'EMS (The European Mathematical Society).

Pauca sed Matura

Figura fondamentale del panorama scientifico di Gottinga, il matematico tedesco Carl Friedrich Gauss è rimasto nella storia, tra le altre cose, per aver reso pubblica soltanto una parte dei suoi risultati. Per apprezzare le sue idee, occorre studiare la corrispondenza e gli scambi epistolari con parecchi contemporanei, tra cui Farkas Bolyai. Estremamente perfezionista, aspettava di essere convinto al 100% di aver trovato la maniera migliore per presentare i suoi risultati. Seguiva alla lettera il motto "Pauca sed matura" (pochi, ma ben maturi). Tra gli allievi più brillanti, ricordiamo Friedrich Bessel, Sophie Germain, Richard Dedekind e Bernhard Riemann. Alle pagine 30 e 31 potete trovare una breve sintesi della sua grandiosa carriera.

Immagine di Alessandro Cattaneo



Sul nastro di Moebius i due versi si scambiano

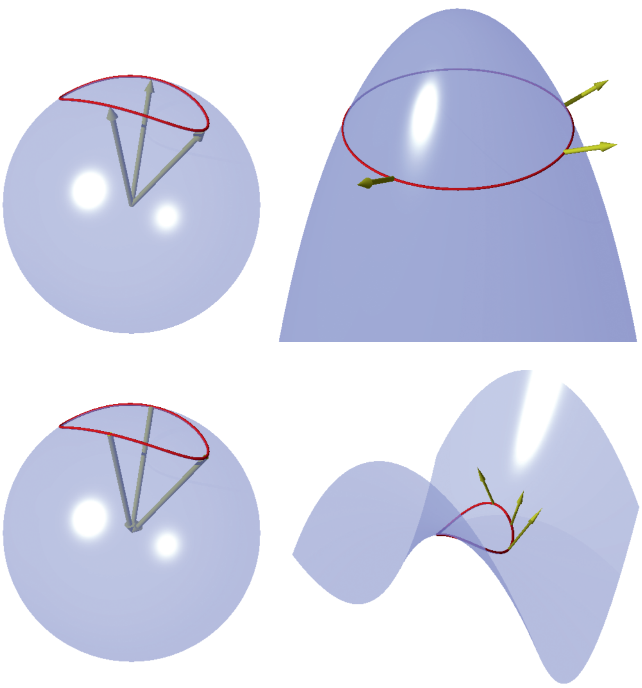
una semiretta che punta in alto e una che punta in basso. Il dubbio che può venire è che, muovendo il punto su *S*, i due versi si possano scambiare – e di fatto lo fanno in alcuni casi.

Ad ogni modo, se *S* è orientabile (come spiegato a pagina 24), si può scegliere senza alcuna confusione per tutti i punti - in modo non banale – un verso sulla normale e un segmento di lunghezza unitaria con un estremo su *S* e l'altro estremo che sia sempre dalla stessa parte – in modo coerente per tutti i punti di S.
L'applicazione di Gauss è definita traslando tale segmento unitario in modo da far coincidere *P* con (0,0,0) e vedendo dove l'altro estremo del segmento incontra la sfera unitaria. Questa intersezione è per definizione l'immagine di *P*.

Prendiamo in esame il caso di un piano. Tutte le normali sono parallele tra loro. Dire che il piano è orientato significa scegliere uno di questi due versi, ad esempio, quello per cui i segmenti sono "sopra" – se il piano è orizzontale. Se trasliamo ciascuno di questi segmenti nell'origine (0,0,0), resta individuata un'unica direzione e, fissata un'orientazione, un unico punto sulla sfera. L'applicazione di Gauss è quindi costante, visto che manda tutti i punti del piano in un solo punto della sfera unitaria, il Polo Nord.

Se l'applicazione di Gauss non è costante in una regione vicino a *P*, le curve su *S* in quella regione vengono mandate in curve sulla sfera unitaria intorno all'immagine di *P*. L'orientazione di *S* induce un'orientazione su tali curve, che può essere conservata oppure no mediante l'applicazione di Gauss.

Immagine di Alessandro Cattaneo

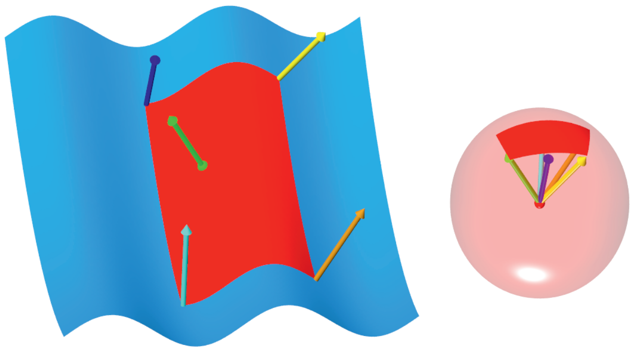


L'applicazione di Gauss può scambiare l'orientazione di curve intorno a un punto oppure no

Gauss è interessato a studiare il rapporto tra l'area di una regione su *S* e quella della sua trasformata sulla sfera rispetto all'applicazione appena introdotta. In questo caso, l'area della regione trasformata sulla sfera viene accompagnata da un segno: positivo se l'orientazione delle curve intorno a P viene conservata o negativo altrimenti. Ciò porta alla definizione di *curvatura totale in un punto* come limite di un rapporto: a denominatore si trova l'area di una regione (fatta di un unico "pezzo") che contiene *P*, e a numeratore l'area (con segno) della regione trasformata. Il limite viene calcolato prendendo regioni contenenti *P* e di area sempre più piccola.

Immagini di Filippo Favale

L'applicazione di Gauss



Confronto tra l'area di una regione su una superficie e l'immagine sulla sfera unitaria

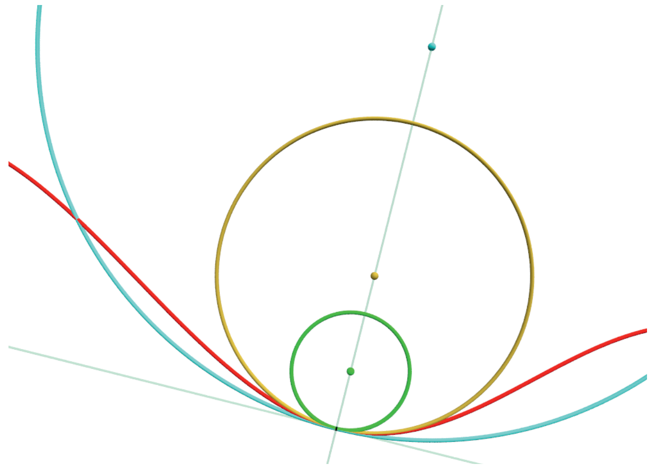
Se si taglia una superficie con un piano passante per la normale in un punto, l'intersezione è una curva piana per la quale esiste la nozione di *curvatura*.

Facendo variare il piano con perno la retta normale nel punto *P*, si ottiene una famiglia di curve, con curvatura data dall'inverso del raggio della circonferenza osculatrice. Tutti i valori di queste curvature variano tra un valore massimo K_{max} e un valore minimo K_{min}. Le due curvature corrispondenti a questi due valori vengono chiamate *curvature principali* della superficie nel punto *P*.

Gauss dimostra che la curvatura totale in un punto *P* è uguale al valore assoluto del prodotto delle due curvature principali. Enuncia allora il suo *Theorema egregium*: "Se due superfici sono isometriche (vale a dire, si ottengono l'una dall'altra per una trasformazione continua e biunivoca che conserva le distanze), allora la curvatura totale delle due superfici è la stessa in tutti i punti corrispondenti". Nello stesso articolo, Gauss spiega come calcolare la curvatura totale a partire da dati intrinseci alla superficie, cioè che non dipendono dal fatto che la superficie sia immersa in uno spazio ambiente. In questo modo, il matematico tede-

Il raggio di curvatura

In rosso la curva ottenuta come l'intersezione di una superficie con un piano normale. Nella famiglia delle circonferenze tangenti alla curva in rosso si passa dalle circonferenze in marrone (le circonferenze più piccole) a quelle in blu (che stanno tutte "oltre" la curva rossa). In verde viene rappresentata la circonferenza che meglio approssima la curva in rosso: per questo si chiama *circonferenza osculatrice*. Il suo raggio è detto *raggio di curvatura*; l'inverso del suo raggio è la curvatura. Se la circonferenza è piccola, allora il raggio è piccolo e la curvatura è grande. In questo caso, abbiamo proprio l'idea intuitiva di un oggetto che è molto "curvo". Se, invece, la circonferenza è grande, allora la curvatura è piccola, dando luogo a un oggetto che si discosta poco dall'essere piatto.



Circonferenze tangenti a una curva

sco intravvede la possibilità di definire delle nuove geometrie, inserendosi nel filone che ha poi portato alle geometrie non euclidee, esplorato da *XlaTangente* nel numero 31 alle pagine 36-38 e nel numero 32 alle pagine 26-28.

Degno continuatore di Gauss è Bernhard Riemann (1826-1866), che propone una generalizzazione straordinaria delle nozioni del suo maestro, la *geometria riemanniana*, geometria intrinseca per spazi più generali che non le superfici. La nozione di retta viene sostituita da quella di *geodetica* (il cammino più breve). Il comportamento locale delle geodetiche viene completamente descritto dal *tensore di curvatura*, che nel caso delle superfici è legato alla curvatura totale. Si tratta di un invariante fondamentale che è nullo per uno spazio piatto (come lo spazio dove valgono gli assiomi della geometria euclidea), e che misura, in generale, quanto uno spazio si discosta dall'essere piatto.

Dopo Gauss e Riemann, che ne è della curvatura all'inizio del XX secolo?

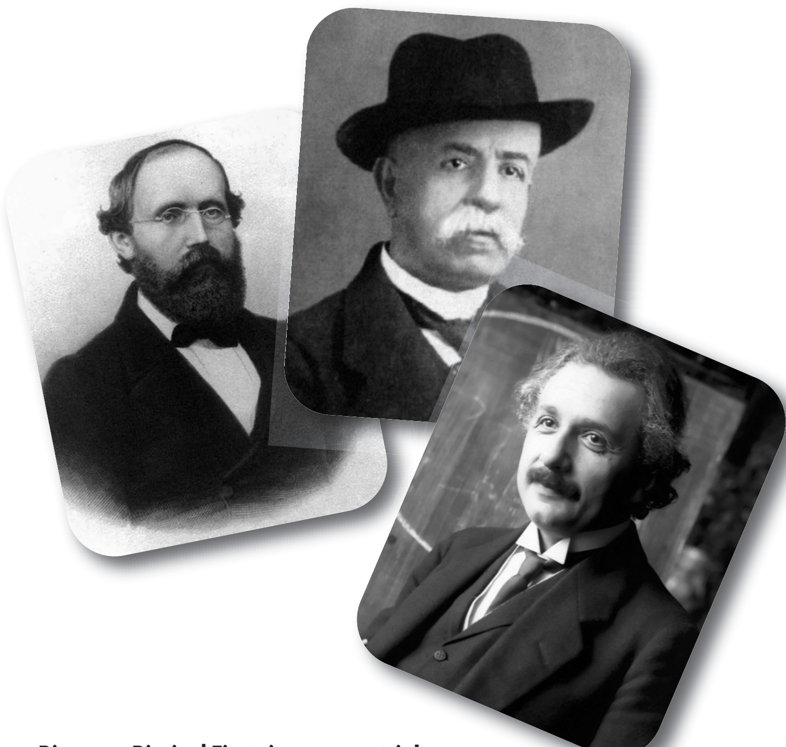
Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) sviluppa tutti gli strumenti tecnici della geometria riemanniana, in collaborazione con un suo allievo, Tullio Levi-Civita. Nel 1904, Ricci introduce una quantità, detta *tensore di Ricci*, ottenuto a partire dal tensore di curvatura di Riemann, che fornisce una misura di quanto le aree e i volumi calcolati in uno spazio curvo differiscano da quelli calcolati pensando lo spazio stesso immerso in un ambiente euclideo, cioè piatto. Questa quantità arriverà al suo massimo splendore nell'ambito della teoria della relatività generale.

Nel 1913, Einstein realizza un ulteriore salto concettuale proponendo di ripensare alla teoria della gravitazione universale di Newton con l'aiuto di strumenti geometrici. Nello spaziotempo, aree e volumi vengono calcolati in modo differente in punti e istanti diversi. Ciò non significa che cambia il modo di calcolarli, ma varia proprio la natura intrinseca dello spazio, la cosiddetta *metrica*, per cui una regione che a un dato istante è piatta, non lo è più al passare del tempo; e regioni in zone diverse dello spazio danno luogo a misurazioni diverse.

Queste idee hanno dato risultati molto fruttuosi negli ultimi anni. Infatti, studiando l'evoluzione di metriche in geometria riemanniana, Grigori Perelman nel 2002 ha dimostrato – rifacendosi a risultati precedenti di Richard Hamilton nel 1983 – la famosa congettura di Poincaré, disdegnando la medaglia Fields e ben un milione di dollari, che gli erano stati assegnati per l'ardua impresa!

Che cosa ci riserverà la curvatura in futuro? A partire dagli anni '80 del XX secolo, la teoria del trasporto ottimale, la geometria riemanniana degli spazi singolari e la geometria degli spazi di misure hanno tutti utilizzato il concetto di tensore di Ricci. La curvatura non ha ancora finito di stupirci...

Traduzione a cura della Redazione dell'articolo *Les espaces courbes, de Gauss a Perelman...* di J.-P. Bourguignon, *Tangente* 135, pp. 12-15.



Riemann, Ricci ed Einstein: un supertrio!