ORDINAMENTI

Succede spesso di confrontare elementi di uno stesso insieme: diciamo che un elemento è più grande di un altro, precede un altro, o è preferibile ad un altro; anche nella teoria economica si fa largo uso delle relazioni di preferenza. Sono tutti esempi di relazioni d'ordine che vorremmo discutere in questa conferenza.

Qualunque sia la nostra idea di ordinamento, un punto irrinunciabile è bene illustrato da tre scatole A, B e C tali che la scatola A stia dentro la B e la B stia dentro la C: allora la A sta dentro la C. Questa proprietà delle tre scatole viene chiamata proprietà transitiva (in altre parole, se A precede B e B precede C, allora A precede C) e costituisce il **PRIMO ASPETTO** degli ordinamenti.

Nel linguaggio comune l'espressione *a* è maggiore di *b* sottintende che *a* sia diverso da *b* (relazione stretta); nella prassi matematica, invece, non si esclude che *a* possa essere uguale a *b* (relazione larga): basta comunque intendersi su quale tipo di relazione si vuole utilizzare.

Relazione larga

$$a \leq b$$

(non esclude $a = b$).

Relazione stretta

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b \ e \ a \neq b.$$

Vediamo adesso qualche esempio di insieme ordinato:

Esempio 1 L' insieme **N** = $\{1,2,3,\ldots\}$ dei numeri naturali con l'ordinamento definito dalla relazione di maggiore o uguale.

$$1 \leq 3 \quad e \quad 3 \nleq 1$$

$$15 < 27 \;\; e \;\; 27 \nless 15.$$

In generale, $n \leq m \;\; e \;\; n \neq m$ => $m \nleq n$

Esempio 2 L' ordinamento fra insiemi: dati A e B insiemi, diremo che A è contenuto in B ($A \subseteq B$) se ogni elemento di A è anche elemento di B.

Esempio 3 L' ordine alfabetico fra le parole della lingua italiana.

Notiamo anche che l'operazione di divisione con quoziente e resto in **N** è strettamente legata alla relazione d'ordine descritta al punto 1), in quanto stabilire quante volte b sta in a equivale a determinare il massimo numero c tale che $cxb \leq a$.

Il **SECONDO ASPETTO** degli ordinamenti è legato alla confrontabilità degli elementi dell'insieme *A* in cui è definita la relazione: supponiamo di avere due sacchi ognuno dei quali contenga tutti gli elementi dell'insieme *A* e di estrarre a caso un elemento in ogni sacco.

Allora sono possibili due casi:

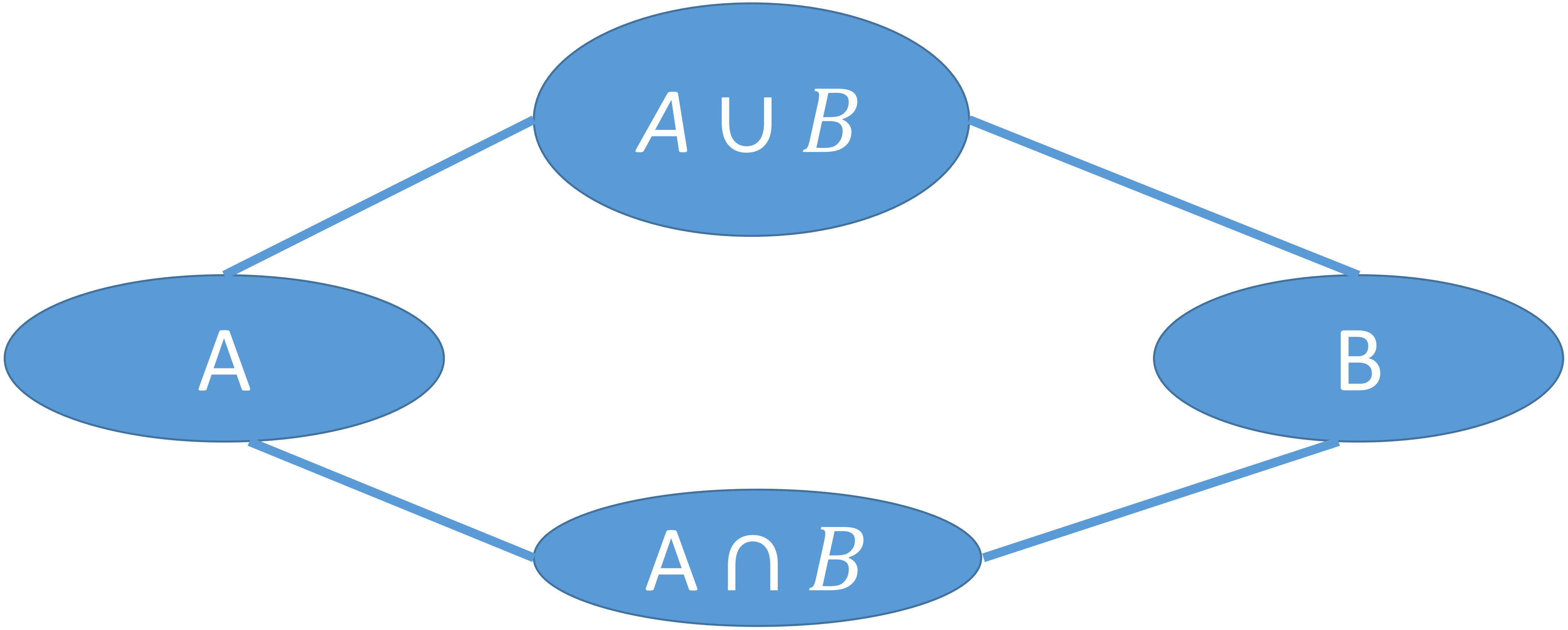
- nel primo caso i due elementi estratti sono sempre confrontabili fra loro (questo succede nell'esempio 1): diremo allora che la relazione d'ordine è totale (o lineare);

- nel secondo caso può accadere di estrarre due elementi non confrontabili fra loro: nell'esempio 2, potremmo estrarre gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 4\}$; diremo allora che la relazione d'ordine è parziale.

Il **TERZO ASPETTO** degli ordinamenti riguarda la proprietà cosiddetta di *antisimmetria*: nella slide 2, oltre a scrivere $1 \leq 3$, abbiamo anche messo in evidenza che $3 \nless 1$ (3 non è minore di 1): questo ci sembra del tutto ovvio, ma va specificato, in quanto, da sola, la prima informazione non esclude la seconda. Gli ordinamenti verificano quindi anche la proprietà seguente:

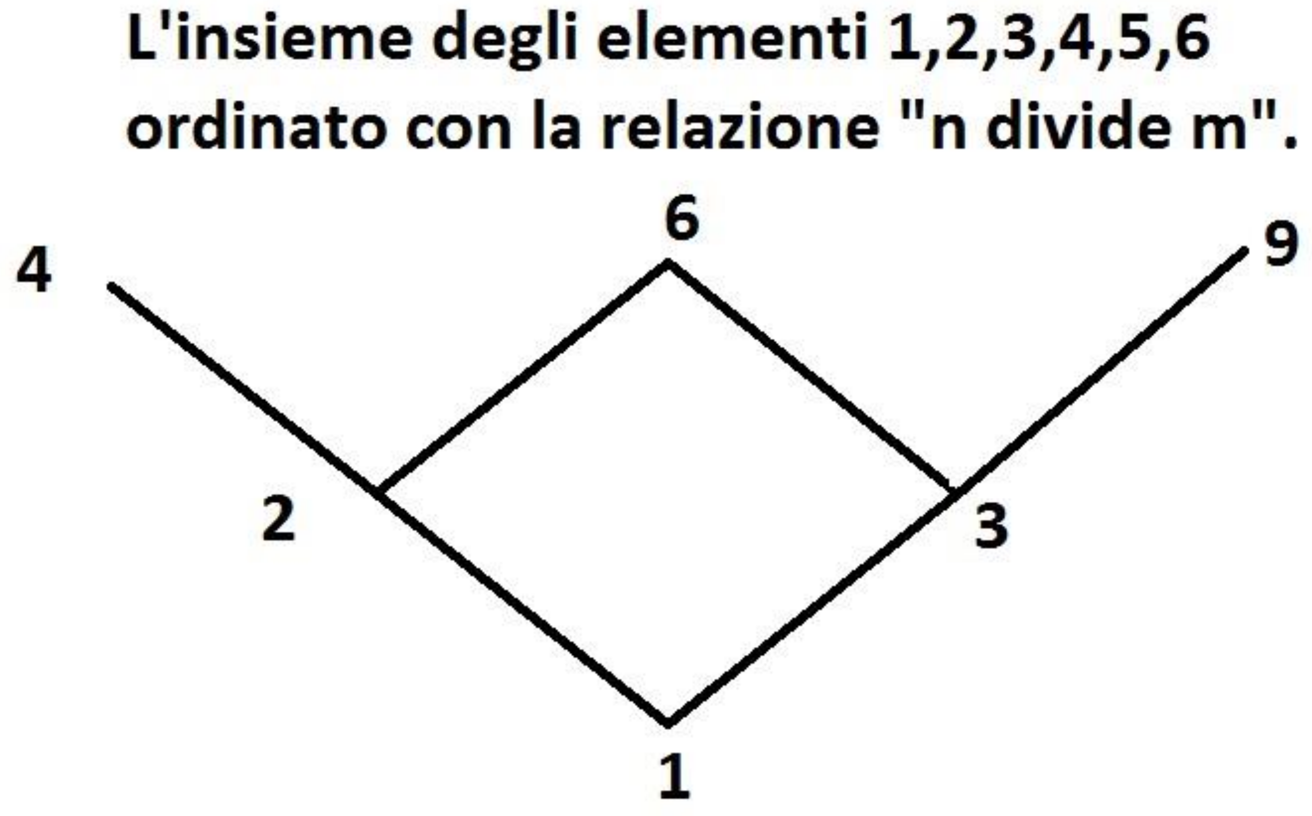
se *a* precede *b* e se *a* e *b* sono diversi, allora *b* non precede *a*.

Riprendiamo la relazione fra insiemi e vediamo che, in generale, non esistono né il massimo né il minimo fra due insiemi, ma che $A \cup B$ è il più piccolo insieme più grande di A e B e, analogamente, $A \cap B$ è il più grande insieme più piccolo di A e B.



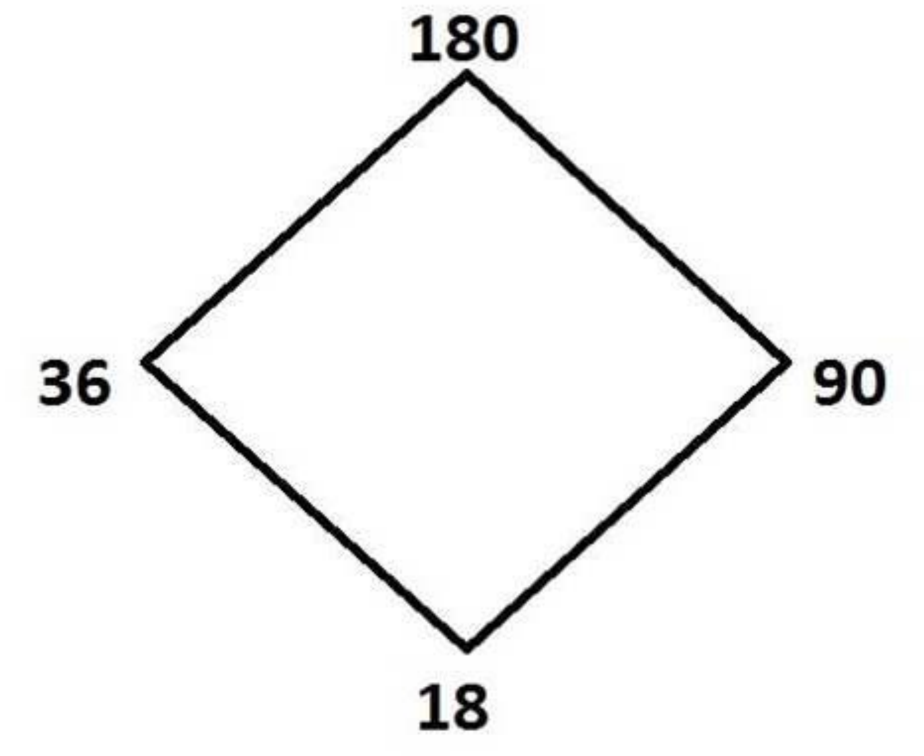
Definiamo adesso una nuova relazione d'ordine sui numeri naturali:

scriveremo $a \mid b$ per dire che a divide b e osserviamo che questa relazione verifica le due proprietà di transitività ed antisimmetria, ma non è totale.



Per questa relazione l'insieme formato, ad esempio, dai due numeri 36 e 90 non ha né massimo né minimo: il MCD e il mcm svolgono esattamente lo stesso ruolo di $A \cup B$ e $A \cap B$ nella slide 8.

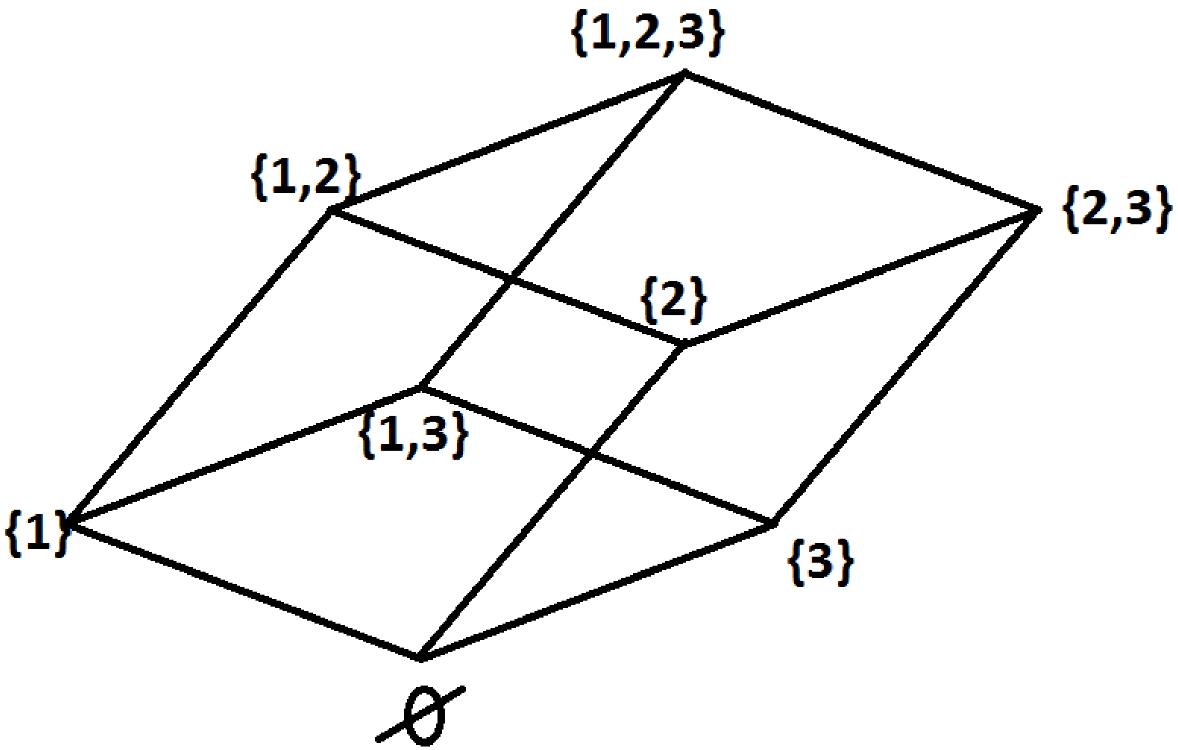
I divisori comuni di
36 e 90 sono
{1, 2, 3, 6, 9, 18}.



M.C. D e m.c.m. di 36 e 90

La definizione di MCD di due numeri data nei libri di testo delle medie utilizza l'espressione più grande divisore dei due numeri, riferendosi alla relazione di maggiore o uguale della slide 2: pur essendo corretta, questa definizione perde di vista il fatto che ogni divisore comune dei due numeri sia un divisore del MCD.

Gli insiemi ordinati nei quali ogni coppia di elementi ammette un elemento (detto estremo inferiore) che si comporti come il MCD o come l' intersezione di due insiemi ed un elemento (detto estremo superiore) che si comporti come mcm o come l' unione, viene detto RETICOLO. La slide successiva mostra il reticolo dei sottoinsiemi dell'insieme $\{1,2, 3\}$.



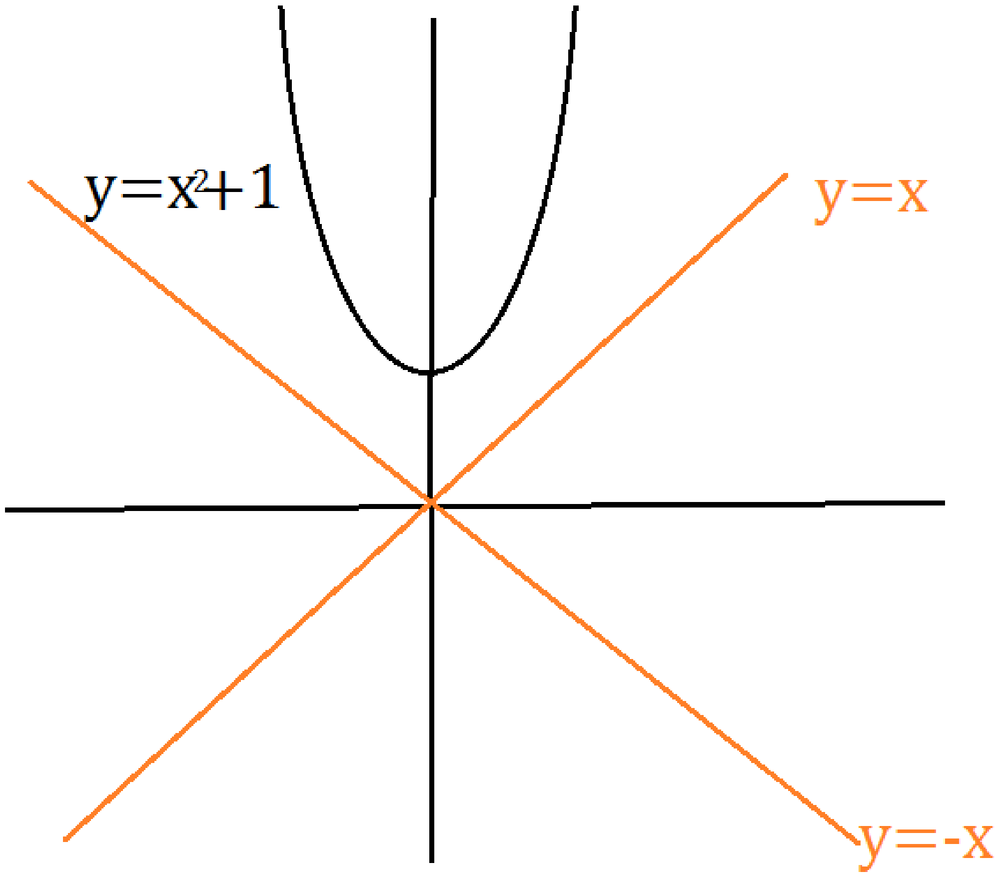
I sottoinsiemi di dell'insieme {1,2,3}.

Applichiamo ora gli ordinamenti ad insiemi di funzioni. Le funzioni reali continue di variabile reale costituiscono un reticolo per l'ordinamento fra funzioni dato da:

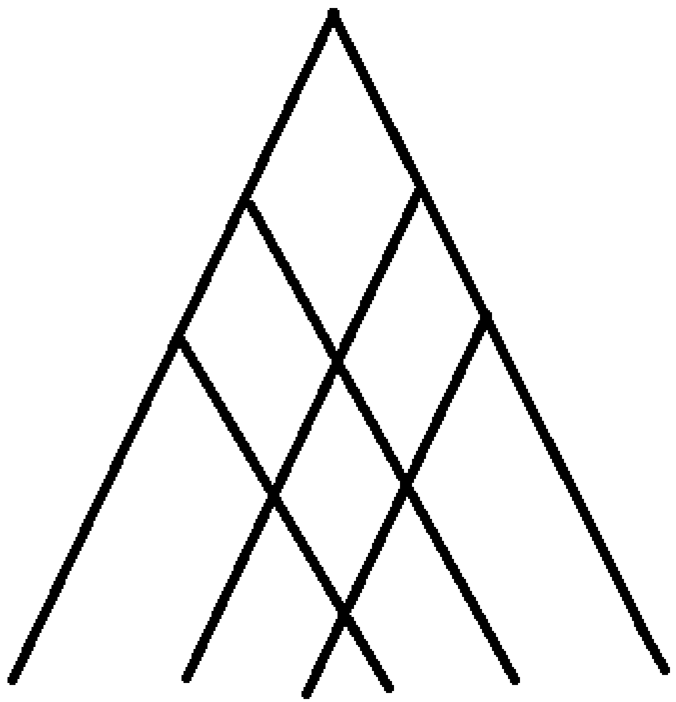
$f \leq g$ se e solo se $f(x) \leq g(x)$ per tutti i valori della variabile indipendente x.

L'insieme delle funzioni derivabili, invece, non costituisce un reticolo, come si può vedere nella slide successiva: l'estremo superiore delle due funzioni $y = x$ e $y = -x$ è dato dalla funzione $|x|$ (modulo di x) che non è derivabile nell'origine.

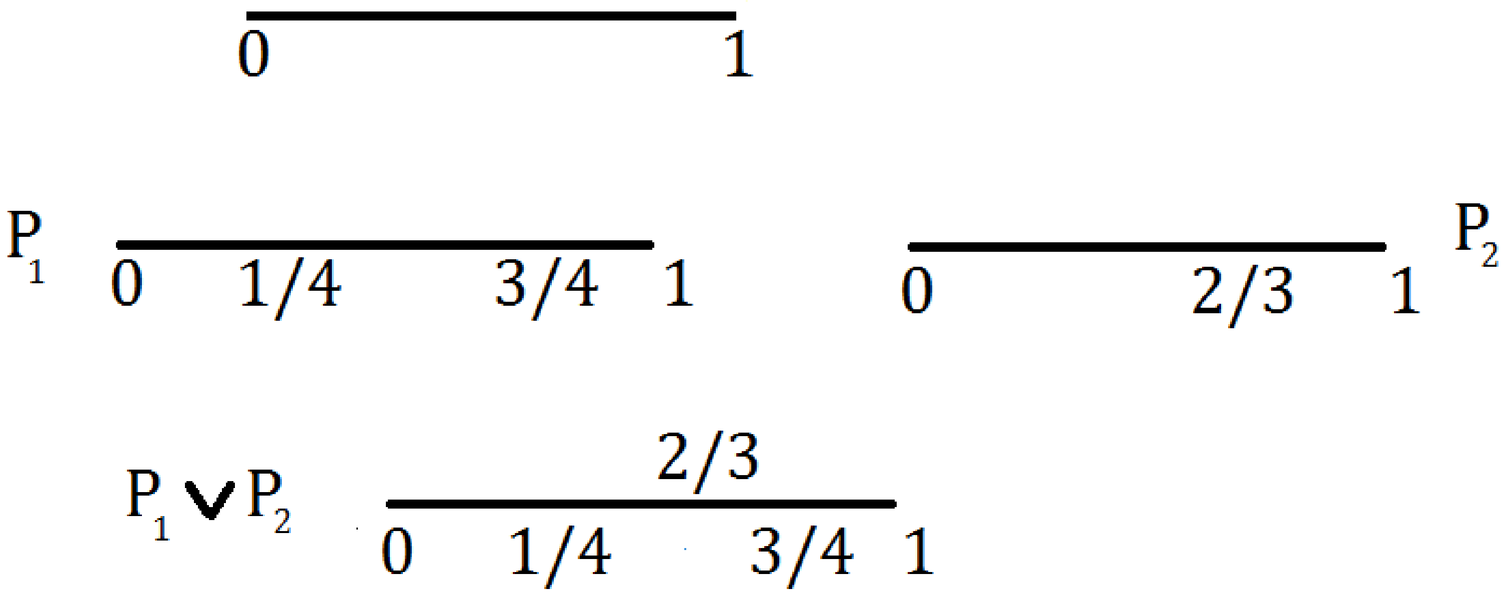
La funzione $y = x^2 + 1$ maggiora le funzioni x e $-x$.



È possibile indebolire le proprietà di definizione dei reticoli, richiedendo soltanto che ogni coppia di elementi ammetta un elemento che li maggiori entrambi: otteniamo così i cosiddetti insiemi filtranti:



Un esempio di insieme filtrante è dato dalle partizioni dell'insieme [0; 1], nel quale si ottiene un maggiorante di due partizioni considerando la partizione costruita inserendo tutti i punti che definiscono le due partizioni di partenza:



Gli insiemi filtranti possono essere utilizzati per dare una definizione molto generale di limite; come caso particolare si ottiene la definizione di integrale definito di una funzione reale di variabile reale:

D filtrante, g: D -> R

$\lim_{x \in D} g(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, x' \in D : \; \forall x \geq x', x \in D$

$|g(x) - L| < \varepsilon$

$$\int_a^b f(x)dx = lim_P \sum f(x_i) l_i = lim_P \, g(P)$$

$$con \; P = \{a, P_1, \dots, P_{n-1}, b\}.$$